TD 19 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 Deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

On considère les deux parties suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+4z=0 \quad \text{et} \quad x-3y-2z=0\}, G = \{(a-b, a-b, a+2b) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de chacun d'entre eux.

Exercice 2 Quelques espaces

Pour chaque espace vectoriel suivant, déterminer s'il est ou non de dimension finie et, le cas échéant, déterminer sa dimension.

1. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\cos x$$

2. À $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'ensemble des suites réelles p-périodiques
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 3 Base de $\mathbb{R}^3$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $t \in \mathbb{R}$ pour que la famille $\big((1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\big)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Bases de sous-espaces vectoriels

Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z=0\right\}$
2. $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X], P\left(X^2\right) = \left(X^3+1\right)P\right\}$
3. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t=0\right\}$

Exercice 5 Familles

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivants :

1. $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (0,1,2,-1), v_3 = (1,0,-2,3), v_4 = (2,1,0,-1), v_5 = (4,3,2,1)$
2. $v_1 = (1,2,3,4), v_2(0,1,2,-1), v_3 = (3,4,5,16)$
3. $v_1 = (1,2,3,4), v_2 = (0,1,2,-1), v_3 = (2,1,0,11), v_4 = (3,4,5,14)$ Ces vecteurs forment-ils une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Sinon, donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille une base du sous-espace engendré par celle-ci.

   Ces vecteurs forment-ils une famille génératrice ? Si c'est le cas, en extraire au moins une base de $\mathbb{R}^4$. Sinon, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $((X-a)^i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P = X^3+2X-1$ et $Q = 2X-1$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont P et Q sont des éléments.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(\alpha) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 9 Vrai ou faux ?

E est un espace de dimension finie, $x_1, \cdots, x_p$ sont des vecteurs de E. Que dire des affirmations suivantes ?

1. Si $x_1, \cdots, x_p$ sont deux à deux non colinéaires, alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.
2. Si aucun x_i n'est combinaison linéaire des autres, alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.

Exercice 10 Un espace de fonctions

On note E l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(x+\varphi)$, A et φ décrivant $\mathbb{R}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 11 Supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des deux sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(2,0,1),(1,1,1)\big)$
2. $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-2y+3z=0\big\}$

Exercice 12 Rang

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$.

1. $\big((1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,1,1)\big)$
2. $\big((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,2,-1,1)\big)$

Exercice 13 Calcul de rang

Calculer le rang de l'application $(x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x+y)$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$. Calculer celui de l'application $(x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-y-z)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$.

Exercice 14 Endomorphisme de polynômes

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Pour tout $P \in E$, on note $\varphi(P)$ le reste R dans la division euclidienne de AP par B.
Montrer que φ est un endomorphisme de E. Quel est son noyau ? Quelle est son image ?

Exercice 15 Pas de dimension finie

Montrer que $P \mapsto (P(0), P')$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$. En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 16 L'herbe sera plus verte

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Déterminer le noyau et l'image de l'application $(f,g) \mapsto f+g$ de $F \times G$ dans E. Quelle formule (déjà démontrée en cours) peut-on en déduire ?

Exercice 17 Endomorphismes tels que $\ker f = \operatorname{Im} f$

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que n est pair si et seulement si il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \ker f$.
2. On suppose n pair. Montrer que pour $f \in \mathscr{L}(E), \operatorname{Im} f = \ker f \iff \mathrm{rg}(f) = \frac{n}{2}$ et $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 18 Encore des endomorphismes tels que $\ker f = \operatorname{Im} f$ (*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On veut montrer l'équivalence entre les deux propositions :

— $\ker f = \operatorname{Im} f$

— $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $\exists g \in \mathscr{L}(E), fg + gf = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que la deuxième assertion entraîne la première.
2. On suppose à présent que $\ker f = \operatorname{Im} f$.
   (a) Montrer que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (b) Pourquoi peut-on se donner un supplémentaire I de $\ker f$ dans E ?
   (c) On note p la projection sur $\ker f$ parallèlement à I et on pose $g = f_{|I}^{-1} \circ p$. Conclure.

Exercice 19 CC INP 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 20 CC INP 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 21 CC INP 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 22 Un endomorphisme de polynômes

On note Δ l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer $\ker \Delta$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.