TD 18 : intégration sur un segment

Exercice 1 Révision

Refaire les exercices du TD 5 sur le calcul d'intégrales et la détermination de primitives.

Exercice 2 Bases : calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \max(e^t, 2)\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 |3t-1|\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)^4\ \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \arctan t\ \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^1 t(\arctan t)^2\ \mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t$

Exercice 3 Changement de variable

1. Déterminer une primitive de $\mapsto \frac{1}{(1+x^2)^3}$ via le changement de variable $x = \tan t$.
2. Déterminer une primitive de $\mapsto \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ via le changement de variable $t = \sqrt{x+1}$.
3. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)^2}{\cos(2t)}\ \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)^2}{\cos(2t)}\ \mathrm{d}t$. Calculer $I+J$ via le changement de variable $x = \tan t$. En déduire I et J.

Exercice 4 Cauchy-Schwarz

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \displaystyle\int_a^b (f+\lambda g)^2$ est polynomiale et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

Exercice 5 Existence de point fixe

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 Un grand classique

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que :

$$\forall k \in [|0, n-1|], \quad \int_a^b t^k f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur le segment $[a,b]$.

Exercice 7 Fonction à base d'intégrale

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\ \mathrm{d}t$$

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 8 Égalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

soit une égalité.

Exercice 9 Limite d'intégrales

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Étudier les limites quand $n \to +\infty$ des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 Encore une limite

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Interprétation géométrique ?

Exercice 11 Des inégalités

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 12 Des sommes

Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

Exercice 13 Irrationnalité de π

On souhaite montrer l'irrationnalité de π par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $a \geq 1$ et $b \geq 1$ tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$. On pose $f_n(t) = \dfrac{t^n(a-bt)^n}{n!} = \dfrac{(at-bt^2)^n}{n!}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{a}{b}} f_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'on a $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer qu'on a, pour tout entier n, $I_{n+2} = 2b(2n+3)I_{n+1} - a^2 I_n$.
   On pourra procéder à deux IPP successives en partant de I_{n+2}.
   Dans les IPP, on intègrera systématiquement le sinus ou le cosinus et on dérivera le reste.
3. En déduire que I_n est entier pour tout entier n.
4. Conclure.

Exercice 14 CC INP 56

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 15 Encadrement de la norme uniforme d'une dérivée (*)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout x et tout h réels,
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2}||f'||_\infty$$
et
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2}||f'||_\infty$$
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$,
$$|f'(x)| \leq \frac{||f||_\infty}{h} + \frac{h}{2}||f'||_\infty$$
3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $||f'||_\infty \leq \sqrt{2||f||_\infty ||f'||_\infty}$.

Exercice 16 Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que
$$\int_0^1 f(t)\sin(nt) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Exercice 17 Un exercice d'oral (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 18 Encore un oral

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.
Montrer que $\int_a^b x f(x) x = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) x$.
En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x$.

Exercice 19 Un oral long mais abordable

1. Exprimer $\cos^2 u$ et $\sin^2 u$ en fonction de $\cos(2u)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3. Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$.
   Ind. Poser $x = (1-t)/2$.
4. À l'aide de sommes de Riemann, calculer la limite de $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$.
5. Déterminer la limite de $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{k(n-k)}/n\right)^{1/n}$.

Exercice 20 Uniformément continue (*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq a|x| + b$$