TD 17 : Applications linéaires

Dans toute la feuille, E... désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 Linéaire ou non ?

Les applications suivantes sont-elles ou non linéaires ?

1. $\begin{cases} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x+y+2z \end{cases}$
3. $\begin{cases} f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y+1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$
5. $\begin{cases} f_5 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' - P^2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} f_6 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$

Exercice 2 Noyaux et images

Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer ensuite une base de leur noyau et de leur image. Sont-elles injectives ? Bijectives ? Surjectives ? Sont-ce des endomorphismes, des isomorphismes, des automorphismes ?

1. $\begin{cases} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (y-3x, 5x+2y, x+y) \end{cases}$
2. $\begin{cases} f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z) \end{cases}$
3. $\begin{cases} f_2 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto X\left(P'(X+1) - P'(1)\right) \end{cases}$

Exercice 3 Un endomorphisme de polynômes

On note Δ l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer $\ker \Delta$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_{\mathbb{R}_n[X]}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Δ est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

Exercice 4 Noyaux, images

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$ d'une part, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$ d'autre part. Généraliser.

Exercice 5 Encore des noyaux et des images

Soit $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f + \ker g$ si et seulement si $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.

Exercice 6 Le plus grand classique des plus grands classiques

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 7 Hyperplan de l'espace des polynômes

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left\{P \in \mathbb{C}[X], P(\alpha) = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$. En déterminer une base.

Exercice 8 Projecteur

Soit $\begin{cases} p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x,y,x+y) \end{cases}$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker p$ et une base de $\operatorname{Im} p$.

Exercice 9 Projecteur sur un espace de polynômes

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus \operatorname{Vect}\left(X^2+X+1\right)$.
2. Déterminer une expression du projecteur sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\operatorname{Vect}\left(X^2+X+1\right)$.

Exercice 10 Symétrie

Soit $\begin{cases} s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y,x,-z) \end{cases}$

1. Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les sous-espaces F et G tels que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
3. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de s.

Exercice 11 Encore une symétrie

On pose $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+2z=0\right\}$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z=0 \text{ et } 2x+y-z=0\right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 12 Somme de projecteurs

Soit p,q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Montrer que dans ce cas, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe.
3. Montrer que $p+q$ est le projecteur de E sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ de direction $\ker p \cap \ker q$.

Exercice 13 Endomorphisme d'un espace de fonctions

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour toute $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Phi \in \mathscr{L}(E)$. L'application Φ est-elle injective ? Surjective ?
2. Déterminer le noyau de Φ.
