TD 16 : dénombrement et probabilités

Exercice 1 Des cartes

Cinq cartes d'un jeu de cinquante-deux cartes sont servies à un joueur.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de ces mains comportent exactement un as ?
3. Combien de ces mains ne comportent aucun as ?
4. Combien comportent au moins un as ?

Exercice 2 Anagrammes

Combien le mot ABRACADABRA possède-t-il d'anagrammes ? Et le mot LIPSCHITZIENNE ?

Exercice 3 Couples

Combien y a-t-il de couples (x,y) dans $\{1,\cdots,n\}^2$ tels que :

1. $x<y$?
2. $y=x+1$?
3. $|x-y|\leq 1$?

Exercice 4 Sous-mots

Combien existe-t-il de mots de 9 lettres contenant le mot MERCI ? Le mot OSLO ?

Exercice 5 Listes d'entiers

1. Combien existe-t-il de p-listes d'entiers de $\{1,\cdots,n\}$ strictement croissantes ?
2. En déduire combien il existe de suites $(x_1,\cdots,x_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$ telles que
$$x_1+\cdots+x_p\leq n$$
3. En déduire combien il existe de suites $(x_1,\cdots,x_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$ telles que
$$x_1+\cdots+x_p=n$$

Exercice 6 Chaussettes

1. Étant donné 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours deux consécutifs.
2. Étant donné 6 personnes qui sont deux à deux amies ou ennemies, montrer qu'il en existe toujours trois qui sont soit mutuellement amies, soit mutuellement ennemies.

Exercice 7 Opérations ensemblistes

Soit A,B,C trois événements d'un espace probabilisé. Exprimer les événements suivants :

1. Aucun des événements A,B ou C n'est réalisé.
2. Un seul des trois événements A,B ou C est réalisé.
3. Au moins deux des trois événements A,B ou C sont réalisés.

Exercice 8 Paradoxe des anniversaires

On considère n personnes dont aucune n'est née un 29 février. On considère aussi que la distribution des jours d'anniversaire est équilibrée.

1. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire ?

2. À partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est égale à 1 ?
3. À partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$?
4. À partir de combien de personnes peut-on dire que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire est strictement supérieure à 99% ?
5. (***) Et si la distribution des jours d'anniversaire n'est pas équilibrée ?

Exercice 9 CC INP 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10 CC INP 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 11 Des dés

1. On lance $n \geq 1$ dés à 20 faces. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit paire ?
2. On lance $n \geq 1$ dés à 3 faces. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit impaire ?

Exercice 12 La chaîne des menteurs

On suppose qu'un message binaire (0 ou 1) est transmis depuis un émetteur M_0 à travers une chaîne $M_1, M_2, M_3, \cdots$ de messagers menteurs qui transmettent correctement le message avec une probabilité p mais qui changent sa valeur avec probabilité $1-p$.
Si l'on note a_n la probabilité que l'information transmise par M_n soit identique à celle envoyée par M_0 (avec comme convention que $a_0 = 1$, déterminer a_{n+1} en fonction de a_n, puis une expression explicite de a_n en fonction de n et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le résutat est-il conforme à ce à quoi l'on pouvait s'attendre ?

Exercice 13 Frites

Une chaîne de restauration rapide cherche à recruter des employés non qualifiés afin de leur faire cuire des frites sans les payer trop cher. Afin de les attirer, la chaîne a financé (très cher) une campagne de publicité dont le message est : « 90% de nos directeurs de restaurant ont commencé en cuisant des frites chez nous ». On admet les points suivants : la publicité n'est pas mensongère ; un individu sur cent mille devient directeur d'un restaurant de cette chaîne ; parmi les individus qui ne deviennent pas directeur d'un restaurant de cette chaîne, un sur mille a cuit des frites dans la chaîne.
Quelle est la probabilité, pour un employé qui cuit ou a cuit des frites dans la chaîne, de devenir effectivement directeur d'un restaurant de cette chaîne ?

Exercice 14 Des dés

On considère un dé blanc équilibré et un dé noir pipé, de façon qu'il sorte le 6 avec une probabilité $1/3$, les autres numéros sortant avec la même probabilité $2/15$. Deux joueurs s'affrontent : le premier choisit le dé qu'il veut et le lance ; le second prend le dé restant et le lance. Le gagnant est celui qui obtient le plus haut score ; en cas d'égalité, le lanceur du dé blanc gagne.
Quelle stratégie adopter pour le premier joueur : choisir le dé noir ou le dé blanc ?

Exercice 15 Probabilités totales

Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement 2 boules rouges et une boule verte, 2 boules vertes et 1 boule noire, 2 boules noires et 1 boule rouge. On tire une boule de la première urne et on la met dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne pour la mettre dans la troisième urne puis on tire une boule de la troisième urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes ?

Exercice 16 Probabilités totales

On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $n-k$ boules blanches.

1. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit verte ?
2. On choisit une urne au hasard puis on tire deux boules sans remise de cette urne. Quelle est la probabilité que ces boules soient vertes ?

Exercice 17 Paradoxe du chevalier de Méré

Est-il plus facile d'obtenir au moins un six en lançant 4 fois un seul dé ou d'obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 18 Indépendance

1. Montrer qu'un événement A est indépendant de tout autre événement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1.
2. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $A \cap B = \emptyset$. À quelle condition les événements A et B sont-ils alors indépendants ?

Exercice 19 Contrôle qualité

Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines. Les machines 1,2,3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des composants.
L'ingénieur s'occupant du contrôle qualité de l'usine estime que :

(i) 2% des composants fabriqués par la machine 1 sont défectueux ;

(ii) 3% des composants fabriqués par la machine 2 sont défectueux ;

(iii) 5% des composants fabriqués par la machine 3 sont défectueux.

On désigne par D l'événement « le composant est défectueux » et M_i « le composant vient de la machine i ».

1. Que valent, pour $i = 1,2,3$, $P(D|M_i)$?
2. Quelle est la probabilité d'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine d'être défectueux ?
3. On obtient une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de M_1 ?
4. Les événements D et M_1 sont-ils indépendants ?

Exercice 20 Adansonia

On permute aléatoirement les lettres du mot BAOBAB. Quelle est la probabilité pour que le mot obtenu soit de nouveau BAOBAB ?

Exercice 21 Encore des dés

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

Exercice 22 CC INP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 23 Mines-Ponts 2015 PC

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent a boules blanches et b boules rouges. Trouver la probabilité d'avoir tiré au moins deux fois plus de boules dans U_1 que dans U_2 avant d'avoir obtenu la première boule blanche.

Exercice 24 Mines-Ponts 2015 MP

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n que l'on tire sans remise. Quelle est la probabilité que la boule 1 soient tirée au k-ième tirage ? On supose que sur les n boules, m sont blanches et les autres rouges. Quelle est la probabilité qu'une boule blanche apparaisse au k-ième tirage ?