Exercice 1 Sous-espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? De quel espace ?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x = y\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 5y - 1 = 0\}$
4. $\{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$
6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + x + y^2 = 0\}$
7. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$
8. $\{P \in \mathbb{R}[X], \delta^\circ P \geq 2\}$
9. $\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) + f(1) = f'(0)\}$
10. $\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 1\}$
11. $\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(1) = 0\}$
12. L'ensemble des suites réelles tendant vers 0.

Exercice 2 Combinaisons linéaires

1. $(5,5,1)$ est-il combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(3,2,0)$ dans $\mathbb{R}^3$?
2. $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$?
3. $x \mapsto \cos(x)^2$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
4. $x \mapsto \sin(2x)$ est-il combinaison linéaire de sin et cos dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?

Exercice 3 Encore des sous-espaces vectoriels

1. Soit $T > 0$. Montrer que l'ensemble des fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions croissantes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$? Et celui des fonctions monotones ? Et celui des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?
3. L'ensemble des fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$? Et celui des fonctions bornées ?

Exercice 4 Espace engendré 1

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on trouver x et y tels que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 5 Espace engendré 2

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ et F celui engendré par $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 6 Espace engendré 3

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\right)$.

Exercice 7 Espace engendré 4 (*)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n} = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

Exercice 8 Liberté dans $\mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$? Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire les liant.

1. $((1,0,1),(1,2,2))$
2. $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$
3. $((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2))$
4. $((1,-1,1),(2,-1,3),(-1,1,-1))$

Exercice 9 Liberté dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. Montrer que la famille $(\sin,\cos,x\mapsto x\sin x,x\mapsto x\cos x)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que la famille $(\exp,x\mapsto e^{2x},x\mapsto e^{x^2})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 10 Liberté dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Montrer que la famille $\left((1)_{n\in\mathbb{N}},\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}},(2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 11 Liberté dans $\mathbb{R}[X]$ (*)

Soit $P_0=1$ et, pour $k\in\mathbb{N}^*, P_k=X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)$. Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 Supplémentaires

On considère les vecteurs $v_1=(1,0,0,1), v_2=(0,0,1,0), v_3=(0,1,0,0), v_4=(0,0,0,1)$ et $v_5=(0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. $\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\text{Vect}\{v_1,v_3,v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\text{Vect}\{v_1,v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 13 Opérations sur les sommes de sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G,H trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. $F\cap G=F+G$ si et seulement si $F=G$.
2. $(F\cap G)+(F\cap H)\subset F\cap(G+H)$
3. $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$

Exercice 14 Espace de suites

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 forment deux sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 15 Paire/impaire

Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et celui des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 16 Somme directe et intersection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2, G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ aussi.
2. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils aussi dans G ?

Exercice 17 Bases et coordonnées

1. Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base.
2. Montrer que $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de X^2+X+1 dans cette base.

Exercice 18 Famille de polynômes échelonnée en degré

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne une famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $i \in [|0,n|]$, $\partial^\circ P_i = i$ (on dit alors que la famille de polynômes est *échelonnée en degré*). Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
