DS 7 MPSI, le 16/03/2022

Ce DS, qui dure 4 heures, est constitué d'un exercice technique et de deux problèmes. Soignez, comme d'habitude, la présentation de votre copie et les arguments.

Exercice 1 : Quelques calculs élémentaires

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Décomposer le polynôme
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$$
en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
(On pourra commencer par déterminer des racines évidentes.)
2. Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ de la fraction rationnelle suivante :
$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^5 + \mathrm{X} + 1}{\mathrm{X}^4 - 1}$$
3. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de
$$\cos(x)\sqrt{1+x}$$
4. (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de
$$\frac{\ln(1+x)}{x} - 1$$
   (b) En déduire le développement limité de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 2.
   (c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement par continuité est dérivable en 0 (on donnera les valeurs de la fonction et sa dérivée en 0).
5. On se place dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère
$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 3z\}$$
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.
   (b) Soit $w = (1, 0, 0)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(w)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Problème 2 : Problème d'analyse

1. **Étude d'une fonction**
On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
   (a) Étudier la continuité à gauche et à droite, la dérivabilité à gauche et à droite de g en 0.
   (b) Étudier les limites et variations de g (à résumer dans un tableau).
2. **Résolution d'une équation différentielle**
   (a) Résoudre l'équation différentielle (E) $\quad x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur chacun des intervalles $]\,0\,;+\infty\,[$ et $]\,-\infty\,;0\,[$.
   (b) On considère une fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En utilisant la continuité de y en 0, montrer que y est nulle sur $\mathbb{R}^-$.

(c) L'équation (E) a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

3. **Dérivées successives et polynômes associés**

(a) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in\,]\,0\,;+\infty\,[\,, \qquad g^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{2n+2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

et que

$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = x^2\mathrm{P}_n'(x) + (1-2(n+1)x)\mathrm{P}_n(x) \tag{1}$$

(c) Calculer $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ et P_4.

(d) Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n.

(e) On considère la fonction f telle que $f(x) = x^2 g(x)$. Démontrer que $f^{(n+1)} = g^{(n)}$.

(f) Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée d'un produit de fonctions, sans oublier les hypothèses nécessaires.

(g) En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}$, démontrer que :

$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = (1-2(n+1)x)\mathrm{P}_n(x) - n(n+1)x^2\mathrm{P}_{n-1}(x) \tag{2}$$

(h) En déduire que :

$$\mathrm{P}_n'(x) = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}(x) \tag{3}$$

(i) Déduire de (1) que :

$$x^2\mathrm{P}_n''(x) + (1-2nx)\mathrm{P}_n'(x) + n(n+1)x^2\mathrm{P}_n(x) = 0 \tag{4}$$

Problème 3 : Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes P_n et L_n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par :

$$\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n, \qquad \mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n^{(n)}$$

Les polynômes L_n sont appelés les *polynômes de Legendre*.

1. **Degré, coefficient dominant et parité**

(a) Expliciter L_0, L_1 et L_2.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, ainsi que le coefficient dominant du polynôme L_n.

(c) On dit qu'un polynôme P est *pair* lorsque $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(-\mathrm{X})$, *impair* lorsque $\mathrm{P}(-\mathrm{X}) = -\mathrm{P}(\mathrm{X})$. Étudier la parité de L_n.

2. **Valeurs de $\mathrm{L}_n(1)$ et de $\mathrm{L}_n(-1)$.**

(a) A l'aide de la formule de Leibniz, donner, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n sous forme d'une somme de polynômes.

(b) En déduire les valeurs de $\mathrm{L}_n(1)$ et de $\mathrm{L}_n(-1)$.

4. **Racines de L_n**

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, déterminer les valeurs de $\mathrm{P}_n^{(k)}(-1)$ et $\mathrm{P}_n^{(k)}(1)$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $]\,-1\,;1\,[$.

6. **Relation entre les polynômes de Legendre**

(a) Former une relation entre P_{n+1}' et P_n pour $n \in \mathbb{N}$, puis une relation entre P_{n+1}'', P_n et P_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) A l'aide de ces deux relations, déterminer une relation liant L_{n+2}, L_{n+1} et L_n pour $n \in \mathbb{N}$.