DS 6 MPSI, le 9/02/2022

Ce DS, qui dure 4 heures, est constitué de 3 exercices et d'un problème. Soyez scrupuleux : seules les réponses justifiées correctement pourront vous rapporter des points.

Exercice 1 : Recherche de valeur approchée d'une solution d'équation

1. Montrer que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$. On pourra utiliser que $\dfrac{6}{10} < e^{-\frac{1}{e}} < \dfrac{7}{10}$.

Cet exercice est consacré à la recherche d'une valeur approchée de α.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x}$ et $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{e}\,;1\right]$. Montrer que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Déterminer $k \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que : $\forall x \in \mathrm{I}, |g'(x)| \leqslant k$.
3. On considère la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = e^{-y_n}$.
   (a) Justifier brièvement que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans I.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_n - \alpha| \leqslant k^n|1-\alpha|$.
   (c) En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (d) Déterminer un entier n_0 tel que y_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-4} près. On pourra utiliser que $\ln(10) \leqslant \dfrac{5}{2}$.

Exercice 2 : Calcul matriciel

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$. Calculer $\mathrm{A}^2, \mathrm{A}^3$ puis A^n pour $n \geqslant 1$.
2. Exprimer M en fonction de A et de I_3. En déduire qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n\mathrm{A}$.
3. Calculer explicitement u_n en fonction de n. En déduire l'expression de M^n.

Exercice 3 : Une équation différentielle

L'objectif de cet exercice est de déterminer les solutions (à valeurs réelles) définies sur $]\,-1\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle (E) ci-dessous

$$|t|y' + y = \frac{1}{1+t} \qquad \text{(E)}$$

On désigne par (E_0) l'équation différentielle homogène associée.

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathrm{I}_1 = \,]\,0\,;+\infty\,[$.
2. **Résolution sur** $\mathrm{I}_2 = \,]\,-1\,;0\,[$.
   (a) Résoudre l'équation homogène (E_0) sur I_2.
   (b) Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{1+x}$$

(c) A l'aide de la méthode de la variation de la constante et du résultat de la question précédente, déterminer une solution particulière de (E) sur I_2.

(d) Conclure pour la résolution de (E) sur I_2.

3. **Résolution sur** $I =]-1\,;+\infty[$**.** Déterminer toutes les solutions de (E) sur I, c'est-à-dire toutes les fonctions dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I,\ |t|f'(t) + f(t) = \frac{1}{1+t}$$

On raisonnera par analyse-synthèse en utilisant la continuité, puis la dérivabilité, d'une telle solution en 0.

Problème 4 : exponentielle d'une matrice On rappelle qu'on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Si A est nilpotente, on définit l'exponentielle de A comme :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Montrer que pour tout $q \geqslant p$:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} A^k$$

2. La somme de deux matrices nilpotentes est-elle nécessairement nilpotente ?
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent : $AB = BA$.
   (a) Montrer que $A + B$ est nilpotente.
   (b) Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Est-ce que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent ?
4. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est inversible et déterminer son inverse.
5. L'exponentielle d'une matrice nilpotente est-elle nilpotente ?
6. Exemple. On pose $A = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -8 \\ -7 & 6 & -5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que A est nilpotente.
   (b) Calculer $\exp(A)$.
   (c) Écrire et résoudre le système $AX = 0$. Donner un vecteur u solution dont la première composante est 4.
   (d) Écrire et résoudre le système $AX = u$. Donner un vecteur v solution dont la première composante est 2.
   (e) Écrire et résoudre le système $AX = v$. Donner un vecteur w solution dont la première composante est -1.
   (f) En notant P la matrice dont les trois colonnes sont respectivement u, v et w, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (g) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ A^n en fonction de N^n. En déduire une expression de $\exp(A)$ en fonction de $\exp(N)$ et calculer explicitement $\exp(N)$.
   (h) En déduire $\exp(A)^{-1}$.