DM 7, pour le 3/03/2022

Une famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On se propose d'étudier les polynômes $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui vérifient la relation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (\mathrm{E})$$

Partie 1 : unicité et existence

1. On se donne deux polynômes R et S tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{R}(\cos x) = \mathrm{S}(\cos x)$$

Montrer que $\mathrm{R} = \mathrm{S}$.

2. En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, il y a au plus un polynôme vérifiant la relation (E).
3. Montrer que P_0 et P_1 existent et déterminer leur valeur.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos((n+2)x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x - \cos(nx)$$

5. En déduire par récurrence que double que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}_n$ existe et que les polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}_n(\mathrm{X})$$

Partie 2 : factorisation

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le degré de P_n est n et que le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} (on pourra effectuer une récurrence double).
7. Résoudre l'équation

$$\cos(nx) = 0$$

d'inconnue $x \in [\,0\,;\pi\,]$. En déduire que P_n admet n racines distinctes dans $[\,-1\,;1\,]$.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n, puis sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
9. En évaluant le polynôme P_n en un point bien choisi, en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, 0 sinon.}$$

Partie 3 : extrema sur $[\,-1\,;1\,]$

10. Montrer que pour tout $x \in [\,-1\,;1\,], |\mathrm{P}_n(x)| \leqslant 1$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $|\mathrm{P}_n(x)| = 1$ d'inconnue $x \in [\,-1\,;1\,]$; en déduire les extrema de P_n sur $[\,-1\,;1\,]$ et les points en lesquels ces extrema sont atteints.

Partie 4 : arithmétique

Cette partie est plus difficile que les trois précédentes. On ne l'abordera qu'en étant sûr d'avoir traité correctement les trois premières.

12. Montrer que pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, on a

$$\mathrm{P}_m\mathrm{P}_n = \frac{1}{2}\left(\mathrm{P}_{n+m} + \mathrm{P}_{n-m}\right)$$

13. Pour un couple d'entiers naturels (m,n) tel que $m \leqslant n$, on se propose de déterminer le quotient $\mathrm{Q}_{n,m}$ et le reste $\mathrm{R}_{n,m}$ de la division euclidienne de P_n par P_m.
    (a) On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$\mathrm{Q}_{n,m} = 2\mathrm{P}_{n,m} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_{n,m} = -\mathrm{P}_{|n-2m|}$$

    (b) Déterminer $\mathrm{Q}_{n,m}$ et $\mathrm{R}_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

(c) On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geqslant 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$\mathrm{Q}_{n,m} = 2\left(\mathrm{P}_{n-m} - \mathrm{P}_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1}\mathrm{P}_{n-(2p-1)m}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_{n,m} = (-1)^p \mathrm{P}_{|n-2pm|}$$

14. On cherche maintenant à déterminer le plus grand commun diviseur (ce qu'on notera désormais pgcd) à P_n et P_m. On fixe m et n deux entiers naturels, $g > 0$ le plus grand commun diviseur des entiers m et n, $m_1 = \dfrac{m}{g}$ et $n_1 = \dfrac{n}{g}$.

(a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors $\dfrac{1}{2^{g-1}}\mathrm{P}_g$ est le pgcd de P_n et P_m.

(b) Montrer que si m_1 est pair ou n_1 est pair, alors P_n et P_m sont premiers entre eux.

(c) Que peut-on dire du pgcd de P_n et P_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes ?