Exercice 1 Manipulations élémentaires sur les suites

Soit $\lambda > 0$ fixé. Simplifier au maximum les expressions suivantes en restant le plus précis possible (tous les o et O sont pris quand $n \to +\infty$) :

1. $o(1)+o(1)$
2. $O(1)+O(1)$
3. $o(1)+O(1)$
4. $o(1)\times o(1)$
5. $O(1)\times O(1)$
6. $o(1)\times O(1)$
7. $-o(1)$
8. $o(1)-o(1)$
9. $5o(1)$
10. $-\lambda O(1)$
11. $-28+O(1)$
12. $\lambda o(1)-\lambda^2 O(1)$
13. $\sqrt{\lambda+o(1)}$
14. $\ln(1+o(1))$
15. $\frac{1}{1+o(1)}$
16. $e^{o(1)}$
17. $o(1)^5$

Vrai ou faux ?

$$o(1)=O(1)? \qquad O(1)=o(1)?$$

Exercice 2 Simplifications

Simplifier au maximum les expressions suivantes (tous les o et O sont pris en $n \to +\infty$) :

1. $n^2 O(n^3)$
2. $\frac{1}{n^2} o(n)$
3. $o(n^2)\times o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
4. $o(e^{-n})\times O(n)$
5. $O(\ln(n))\times O\left(\frac{1}{n^3}\right)$
6. $2o(\sqrt{n})+o(\sqrt{n})$
7. $O\left(\frac{1}{n}\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)$
8. $o(e^{-n})-2O(e^{-n})$
9. $\frac{1}{n}(o(\ln n)-o(\ln n))$
10. $o(n+\ln n)$
11. $o(n+5+\sin(n))$
12. $o\left(\frac{1}{n+5}+\frac{1}{n^2}\right)$
13. $\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 3 Des exemples

Déterminer un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de :

1. $n+2$
2. $\dfrac{1}{n}+2$
3. $3e^{2n}+2n^4$
4. $\dfrac{1}{2n^2}-\frac{3}{n}+e^{-n}$
5. $(n+2)e^{n+3}$
6. $(n^2+n+1)\ln n$

Exercice 4 Des équivalents simples

Déterminer des équivalents simples aux suites de terme général suivants. Le cas échéant, donner leur limite :

1. $((n+3)\ln(n))e^{-n+1}$
2. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
3. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$
4. $\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$
5. $\dfrac{3}{5n^2+1}$
6. $(2n-\ln n)^3$
7. $\dfrac{\ln(n^1+1)}{\ln(n+1)}$
8. $\left(\dfrac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
9. $\sqrt{\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{2}{n^2}}$
10. $\dfrac{n\ln(n^2+n)+2n}{(n+1)^2\ln(n^5+1)}$
11. $(2n-\ln n)^3$
12. $\left(\dfrac{n+e^n}{1+e^{2n}}\right)^2$
13. $\sqrt{\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{2}{n^2}}$

Exercice 5 Passages aux logarithme et exponentielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives, équivalentes et tendant vers $+\infty$.

1. Montrer que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{\ln(n^2+3n+2)}{\ln n}$ et $\dfrac{n^2+1}{\ln(e^n+n)}$.

Exercice 6 Manipulations élémentaires sur les fonctions

1. Simplifier au maximum les expressions suivantes en restant le plus précis possible. Les O et o sont en $x\to+\infty$.

   (a) $o(x+1)$
   (b) $o(5x^2)-o(2x^3)$
   (c) $O(x)-O(x^2)$
   (d) $\ln(x)(o(x)+o(x^2))$
   (e) $O(2+x-3x^4)$
   (f) $o\left(\dfrac{1}{x}\right)+o(1)$
   (g) $o(x^2-2-\frac{1}{x^3})$
   (h) $o\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$
   (i) $1+2x-x^2+o(x)$
   (j) $5x^5-3x^2+o(x^3)$
   (k) $-2+x^2-x^3+o(x+1)$
   (l) $1+\frac{1}{x}-x^2+o(x-x^2)$

2. Reprendre le même travail avec cette fois-ci les o et O en $x\to 0$.

Exercice 7 Avec des fonctions

Déterminer un équivalent simple lorsque $x\to+\infty$ puis lorsque $x\to 0$ de :

1. $2+3x$
2. $2x^2-5x+7$
3. $x^4-2+\dfrac{4}{x}$
4. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}$
5. $5\ln(x)+2$
6. $5\ln(x)+2x$
7. $5\ln(x)+\dfrac{2}{x}$
8. $\dfrac{1}{2x+3}$
9. $3e^x+x-1$
10. $\dfrac{x-3x^3}{2x^2+x^4}$
11. $\dfrac{3x^2}{x^2+x^3}$
12. $\dfrac{2e^x+x^2+3}{e^{2x}+x^3}$
13. $\dfrac{1}{3x-2}$

Déterminer un équivalent simple lorsque $x\to 0$ de $\sin(x),\cos(x),e^x$ et e^x-1.

Exercice 8 Equivalents

Déterminer un équivalent et la limite de la fonction f au(x) point(s) considéré(s) :

1. $f(x)=e^x+\sin x$ en 0 et en $+\infty$;
2. $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$;
3. $f(x)=\sin(x^2)$ en 0 ;
4. $f(x)=\ln(\cos x)$ en 0 ;
5. $f(x)=\dfrac{\tan x\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$ en 0 ;
6. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 ;
7. $f(x)=\dfrac{\left(\ln(\ln x)\right)^2-\cos^5 x+\ln x}{2^x-50x^6}$ en $+\infty$;
8. $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 9 Calcul de DL

Déterminer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3
2. $\sin(x)^4$ à l'ordre 4
3. $e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2
4. $\dfrac{1}{1-2x}-e^{4x}$ à l'ordre 2
5. $\sqrt{1+x}\ln(1+3x)$ à l'ordre 2
6. $(1+\tan(x))^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 2
7. $\frac{x^2}{1-\cos(x)}$ à l'ordre 3
8. $\dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$ à l'ordre 3
9. $\dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$ à l'ordre 4
10. $\ln\left(1+x+\sqrt{1+x}\right)$ à l'ordre 3

Exercice 10 Des techniques incontournables

1. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer le comportement lorsque $t \to 0$ de $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$.
3. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
4. Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{\cos x}$. En déduire un équivalent de $\frac{1}{\cos x}-1$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 11 Des calculs de limites

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-2x}}{\cos(\pi x)-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x^2+\sin(x)^3}{\sqrt[3]{1+x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin(x)-\tan(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin(x)^3}\right)$

Exercice 12 Fonctions en puissance

1. Déterminer le domaine de définition et le comportement en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$?
2. Déterminer le comportement en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\ln x}$.

Exercice 13 Étude locale de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}.$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente en 0 dont on donnera l'équation et étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 14 Dérivabilité d'une fonction prolongée par continuité

Soit $g : t \to \dfrac{\sin(\pi t)}{\sqrt{t}-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de g ? Peut-on prolonger g par continuité ?
2. Étudier la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée sur tout son ensemble de définition.

Exercice 15 Développement asymptotique d'une suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.
2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$, puis que $u_1 = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, puis que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, puis $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})$.

Exercice 16 Développement asymptotique d'une suite implicite

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note désormais x_n.
2. Déterminer la limite l de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $x_n - l$. Résumer en une seule ligne le résultat de cet exercice.

Exercice 17 Un contre-exemple standard (*)

On considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

prolongée par $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. f admet-elle un développement limité en 0 ? À quel ordre maximal ?
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18 Classe d'une fonction (*)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.

Exercice 19 CC INP 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \sinh\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 20

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et μ, x deux réels. Montrer que

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x$$
