

Exercice 1 Polynôme et inégalité

Quels sont les réels a tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x^2 + a$?

Exercice 2 Degré et coefficient dominant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $(X+1)^n - (X-1)^n$.

Exercice 3 Équations à inconnue polynôme

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

- | | |
|-----------------------------|--------------------|
| 1. $P \circ P = P$ | 4. $XP(X) = P(X)$ |
| 2. $P^2 = P$ | |
| 3. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ | 5. $P(X+1) = P(X)$ |

Exercice 4 Divisions euclidiennes

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

- $X^6 + X^5$ par $X^2 - 1$
- $2X^3 - 11X^2 + 7X + 20$ par $2X - 5$
- $X^5 - 5X^4 + 31X^2 - 43X + 6$ par $X^3 - 5X^2 + 6X$
- $X^4 + 1$ par $X^2 - \sqrt{2}X + 1$
- X^n par $X - 1$.

Exercice 5 Divisibilité

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que $X^4 - X + a$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

Exercice 6 Reste

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ (on distinguera les cas $a = b$ et $a \neq b$).
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 7 Multiplicité

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

Exercice 8 Dérivation

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a) \geq 0$$

Montrer que le polynôme P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Exercice 9 Décomposition

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants. Sont-ils scindés ? À racines simples ?

1. $X^4 - 1$

2. $X^5 - 1$

3. $X^4 + X^2 + 1$

4. $X^4 + 16$

5. $4X^4 - 4X^3 - 3X^2 - X - 1$

6. $X^{2n} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

7. $X^{2n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

8. $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ ($a \in]0, \pi[, n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 10 PGCD

Soit P un polynôme non constant. Déterminer le PGCD de P et P' .

Exercice 11 Bézout, Gauss

Montrer que $(X - 1)^2$ et $(X + 1)^2$ sont premiers entre eux. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leq 4$, $(X - 1)^2$ divise $P(X) + 1$ et $(X + 1)^2$ divise $P(X) - 1$.

Exercice 12 PGCD et division euclidienne

Soit n et m deux entiers tels que $n \geq m$.

1. En utilisant la division euclidienne de n par m dans \mathbb{Z} , effectuer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
2. En déduire que le pgcd de ces deux polynômes est $X^{m \wedge n} - 1$.

Exercice 13 Lagrange

Déterminer tous les polynômes P de degré inférieur ou égal à 3 tels que

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2, \quad P(2) = 4$$

Exercice 14 Mines-Ponts 2017 PC

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, unitaire. Montrer que P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$$

Exercice 15 Centrale 2010 PSI

Trouver une CNS sur $P \in \mathbb{R}[X]$ pour qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad P(\tan(x)) = Q\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

Q est-il unique ?

Exercice 16 CC INP 1998 MP

Trouver l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X) = (X - a)(X - b)$$

et $P(X)$ divise $P(X^3)$. (on pourra d'abord étudier le cas $a = b$).

Exercice 17 Peut-on tout faire ?

Existe-t-il une fraction rationnelle F telle que $(F(X))^2 = (X^2 + 1)^3$?

Exercice 18 DÉS

Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

1. $\frac{X}{X^2 - 4}$

3. $\frac{X^4 + 1}{X^4 - 1}$

2. $\frac{X + 1}{X^4 + 1}$

4. $\frac{X^2 + 1}{X^2(X + 1)^2}$

Exercice 19 DÉS bis

Soit $n \geq 2$. Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X - 1)(X^n - 1)}$.

Exercice 20 Application de DÉS : 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer la dérivée d'ordre n de $\frac{1}{X(X^2 + 1)}$.

Exercice 21 Application de DÉS : 2

Calculer $\int_0^{1/2} \frac{t^5}{t^4 - 1} dt$.

Exercice 22 Application de DÉS : 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
