Exercice 1

Calculer, lorsque c'est possible, pour $i, j = 1,2,3,4$ les produits matriciels A_iA_j avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 et B^3 et exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.
2. En appliquant la formule du binôme, donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $AB, BA, A^2, B^2, A^2 - B^2, (A+B)(A-B), A^2 + B^2 + 2AB, (A+B)^2$.

Exercice 4 Un produit

Calculer de deux façons différentes le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle était la plus judicieuse ?

Exercice 5 Puissances

Calculer les puissances des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 Puissances de matrices : application

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = w_0 = 1$, $v_0 = 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 7 Quelques systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants (on écrira bien proprement l'ensemble des solutions avec des Vect) :

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-5y=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-3y-7z=10 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$

Exercice 8 Systèmes linéaires paramétrés

Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction du paramètre $p \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} 2px+y=1 \\ 2x+py=p \end{cases}$
2. $\begin{cases} px+py+4z=1 \\ 2x+y+pz=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y+z = 1-p \\ px+(1+p)y+(1+p)z = p-p^2 \\ px+(1-p)y+(1-p)z = p^2 \end{cases}$

Exercice 9 Inversion de matrices

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$
7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 Un anneau de matrices

On note A l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de multiplication matricielles.
2. Déterminer $U(A)$.