TD 11 Dérivabilité, convexité

Exercice 1 Par cas

Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ (en fonction des paramètres a, b pour la deuxième) de

1. $x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
2. $x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2 Dérivées successives

Calculer les dérivées successives de

1. $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
2. $x \mapsto a^x$ ($a > 0$)
3. sin et cos
4. $x \mapsto \frac{1}{x+a}$ ($a \in \mathbb{R}$)
5. $x \mapsto x^2 \sin(x)$
6. $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$

Exercice 3 Bis repetita placent

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Préciser le degré de P_n.

Exercice 4 Variations de la dérivée

Soit f dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$. Montrer qu'alors f' prend au moins une valeur strictement négative sur $[a,b]$.

Exercice 5 Réciproque

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle à préciser.
2. Sans déterminer f^{-1}, montrer que cette fonction est dérivable sur $]1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 6 Une inégalité

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 7 Fonctions lipschitziennes

1. Montrer que $f : t \mapsto \sqrt{t+1}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sur tout segment $[a,b]$ avec $-1 < a < b$. L'est-elle sur $]-1, +\infty[$?
2. Soit $g : t \mapsto e^{-t} + t^2$. Montrer que g est lipschitzienne sur $[0,1]$, ainsi que sur tout segment $[a,b]$ avec $a < b$. L'est-elle sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment y est lipschitzienne.
4. Montrer que toute fonction périodique de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ y est lipschitzienne.

Exercice 8 Rolle en chaîne

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n : x \mapsto (x^2-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [|0, n-1|]$, on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in [|0, n|], P_n^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes comprises strictement entre -1 et 1.

Exercice 9 Une extension de Rolle

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(x) \to f(0)$ quand $x \to +\infty$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 Application du TAF

Déterminer la limite, quand $x \to +\infty$, de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 11 Suite récurrente et accroisements finis

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha = \frac{e^\alpha}{\alpha+2}$.
3. Soit $u_0 \in]0,1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n,$$
et en déduire que la suite converge vers α.
4. Déterminer un rang n pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

Exercice 12 Prolongement

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 13 Polynômes (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que le polynôme $X^n + pX + q$ possède au plus trois racines réelles, et que, si n est pair, ce polynôme n'en possède même au plus que deux.

Exercice 14 Recollement 1

On considère l'équation différentielle $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Soit y une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Déterminer $y(0)$ et la forme de y sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité d'une telle fonction sur $\mathbb{R}$.
4. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation.

Exercice 15 Recollement 2

Reprendre l'exercice précédent avec l'équation différentielle $ty'(t) - y(t) = t^2$.

Exercice 16 Recollement 3

Reprendre l'exercice précédent avec l'équation différentielle $t^2y'(t) - y(t) = 0$.

Exercice 17 Recollement 4

Reprendre l'exercice précédent avec l'équation différentielle $(t+1)y'(t) + y(t) = (t+1)\sin(t)$.

Exercice 18 Convexité

Étudier la convexité de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

Exercice 19

Étudier la convexité et les points d'inflexion des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (\ln(x))^2$
2. $g : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$
3. $h : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

Exercice 20 Inégalités de convexité

Montrer les inégalités suivantes par un argument de convexité :

1. $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$

Exercice 21 Exponentielle et logarithme

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a + e^b}{2}$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
3. En déduire que pour tous $a, b > 1$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Exercice 22

Justifier que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ et pour tous réels positifs $t_1, \dots t_n$ de somme égale à 1, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^2.$$

Exercice 23

Soit ϕ continue et convexe sur $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi(t) \leq (1-t)\phi(0) + t\phi(1)$.
2. En déduire que $\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\phi(0)+\phi(1)}{2}$.

Exercice 24

1. Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que pour tous réels positifs $y_1, \dots, y_n$ on a

$$(y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Déduire de la question précédente l'inégalité
$$n \leq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}.$$

Exercice 25 CC INP 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 26 CC INP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 27 CC INP 42

On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?
