Exercice 1 *Groupes et sous-groupes*

1. Montrer que $\{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions $z \mapsto az + b$, (a,b) décrivant $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, est un groupe pour la composition.

Exercice 2 *Groupe symétrique*

Soit E un ensemble à au moins 3 éléments. Montrer que S_E n'est pas commutatif.

Exercice 3 *Centre d'un groupe*

Soit $(G,*)$ un groupe. On considère $C = \{h \in G, \forall g \in G, h * g = g * h\}$ qu'on appelle le *centre* de G.

1. Si G est commutatif, que dire de son centre ?
2. Dans le cas général, démontrer que C est un sous-groupe de G.
3. Déterminer le centre de S_3.

Exercice 4 *Sous-groupes de* $\mathbb{Z}$

On rappelle que, si $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak, k \in \mathbb{Z}\}$.
Le but de l'exercice est de déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\{0\}$ est un sous-groupe de Z de la forme $a\mathbb{Z}$.
   On fixe maintenant H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.
3. Montrer que $H^+ = \{h \in H, h > 0\}$ possède un plus petit élément. On note ce plus petit élément a.
4. Montrer que $a\mathbb{Z} \subset H$.
5. En étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par a, montrer que $H \subset a\mathbb{Z}$.
6. Conclure *soigneusement* l'exercice.
7. Bonus : si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc de la forme $d\mathbb{Z}$. Montrer que $d = a \wedge b$.

Exercice 5 *Anneaux, corps*

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un anneau. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i], |z|^2 \in \mathbb{N}$, puis en déduire le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que l'ensemble des décimaux est un anneau. Déterminer le groupe de ses inversibles.
3. Montrer que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \{a + b\sqrt{3}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

Exercice 6 *Anneau produit*

Soit A et B deux anneaux. On pose, pour tous (a,b) et (a',b') dans $A \times B$: $(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b')$ et $(a,b) \times (a',b') = (aa', bb')$.

1. Montrer que $(A \times B, +, \times)$ est un anneau.
2. Montrer que si A et B sont non nuls alors $A \times B$ n'est pas intègre.

Exercice 7

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{U}_a$ soit un sous-groupe de $\mathbb{U}_b$.

Exercice 8 *Sous-groupes de $\mathbb{R}$ (*)*

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. On pose

$$\alpha = \inf(\mathbb{R}_+^* \cap G)$$

1. Justifier l'existence de α
2. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Montrer que si $\alpha = 0$, pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g \in G$ tel que $|x-g| \leq \varepsilon$.
4. En déduire que dans ce cas, G est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Application : soit $a,b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \{an+bm | n,m \in \mathbb{Z}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 9

1. L'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est-il intègre ?
2. Déterminer le groupe de ses inversibles.

Exercice 10

1. Montrer que $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 3x+6y$ est un morphisme de groupe.
2. Déterminer son noyau.

Exercice 11

Les applications $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto 2x$ de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même sont-elles des morphismes de groupes ?

Exercice 12

Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z},+)$ dans lui-même. Lesquels sont surjectifs ? Injectifs ?

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^n$. Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dans lui-même. En déterminer image et noyau.

Exercice 14 *Morphismes de $\mathbb{C}$ qui préservent $\mathbb{R}$*

Déterminer les morphismes d'anneaux $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 15 *Morphisme d'évaluation en a*

Soit X un ensemble et $a \in X$. Montrer que $e_a : \mathscr{F}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par : $\forall f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{R}), e_a(f) = f(a)$ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 16 *Caractéristique d'un anneau*

Soit A un anneau.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z} \to A$.
2. Justifier que son noyau est $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que n est la *caractéristique* de l'anneau A. Dans la suite, on suppose que $n \neq 0$.

3. Montrer que si A est intègre, alors n est premier.
4. Montrer que si A est intègre et commutatif alors $F : x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneaux.