DS 5 MPSI, le 19/01/2022

Ce DS, qui dure 4 heures, est constitué de 3 exercices et d'un problème. Soyez scrupuleux : seules les réponses justifiées correctement pourront vous rapporter des points.

Exercice 1 : Limites d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (e^x + \sin(x))x^2$$

Déterminer le comportement (existence ou non de limite, et le cas échéant, valeur de ladite) en $-\infty$, $+\infty$ et en 0. On attend une justification précise pour chacun des cas.

Exercice 2 : Triplets pythagoriciens

On appelle *triplet pythagoricien* un triplet (x, y, z) d'entiers dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Le but du problème est de déterminer tous les triplets pythagoriciens.

1. Donner un exemple de triplet pythagoricien.
   On fixe dans les questions 2 à 9 un triplet pythagoricien (x, y, z). On note $d = x \wedge y$.
2. Montrer que d divise z.
3. On pose $x = dx', y = dy', z = dz'$. Montrer que (x', y', z') est un triplet pythagoricien. Montrer également que z' est premier avec x' et avec y'.
4. Si a et b sont deux entiers impairs, montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est divisible par 4.
5. En déduire que x' et y' ne peuvent pas être tous les deux impairs.
6. Montrer que x' et y' sont de parités différentes. Quelle est la parité de z' ?
   On suppose, dans la suite, que x' est pair et que y' est impair.
7. On pose $x' = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux entiers strictement positifs b et c tels que $b + c = z'$ et $b - c = y'$. En déduire que $a^2 = bc$.
8. Montrer que b et c sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe deux entiers u et v tels que $b = u^2$ et $c = v^2$.
9. En déduire que $x = 2duv, y = d(u^2 - v^2)$ et $z = d(u^2 + v^2)$.
10. Conclure en déterminant tous les triplets pythagoriciens.

Exercice 3 : Sous-groupes et morphismes

On considère deux groupes $(\mathrm{G}, *)$ et $(\mathrm{G}', \triangledown)$, et un morphisme de groupes $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f^{\rightarrow}(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}', \triangledown)$.
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{\leftarrow}(\mathrm{H}') = f^{-1}(\mathrm{H}')$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, *)$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{e\}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^n$$

   Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même. En déterminer image et noyau.
   (On pourra distinguer plusieurs cas.)

Problème 4 : une équation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g \circ g(x) = 2g(x) - x \tag{$\mathbf{1}$}$$

Dans tout le problème, on note $g^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et g^n la composée de g par elle-même n fois. On peut donc réécrire la propriété $(\mathbf{1})$:

$$g^2 = 2g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$$

Dans les questions 1 à 14, on fixe une fonction g, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(\mathbf{1})$.

1. Montrer que g est injective.
2. En déduire que g est strictement monotone.
3. Que dire de la monotonie de $g^2 = g \circ g$?
4. En déduire que g est strictement croissante.
5. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) \geqslant \frac{g^2(0) + x}{2}$$
6. En déduire l'existence et la valeur de la limite de g en $+\infty$.
7. Montrer de même que $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.
8. En déduire que g admet une réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On notera désormais pour tout entier naturel n :

$$g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$$

9. En évaluant $(\mathbf{1})$ en un réel judicieusement choisi, montrer que g^{-1} vérifie aussi la propriété $(\mathbf{1})$.
10. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^n(x) = ng(x) - (n-1)x$$
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{g^n(x) - g^n(0)}{n} = g(x) - g(0) - x + \frac{x}{n}$$
12. En utilisant notamment la monotonie de g, montrer que pour tout réel x positif, on a $g(x) \geqslant g(0) + x$ et que pour tout réel négatif, $g(x) \leqslant g(0) + x$.
13. Montrer que pour tout réel x, $g^{-1}(x) = 2x - g(x)$.
14. En utilisant le fait que g^{-1} vérifie la propriété $(\mathbf{1})$, montrer finalement que pour tout réel x, $g(x) = g(0) + x$.

On a donc montré que toute fonction solution du problème était de la forme $x \mapsto x + \mathrm{K}$, pour un certain réel K.

15. Conclure le problème.