Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1 Généralités

1. Montrer que les fonctions cos et ch appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. Soit f dans $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto f(\alpha x)$ appartient à $\mathscr{E}$.
3. Soit f dans $\mathscr{E}$. Montrer que :
   (a) $f(0)$ vaut 0 ou 1 ;
   (b) Si $f(0)=0$, alors f est identiquement nulle ;
   (c) Si $f(0)=1$, alors f est une fonction paire.

2 Avec une hypothèse supplémentaire de régularité

Dans cette partie, on cherche à déterminer quelles sont les fonctions de $\mathscr{E}$ qui sont deux fois dérivables. On fixe f une telle fonction.

4. Montrer que
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$
5. En déduire qu'il existe une constante $\lambda\in\mathbb{R}^2$ telle que
$$\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x).$$
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+\mu y=0$ en séparant les cas $\mu>0, \mu<0$ et $\mu=0$.
7. En déduire *soigneusement* les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont deux fois dérivables.

3 Sans l'hypothèse de régularité

Dans cette partie, on ne fait plus d'hypothèse supplémentaire sur les fonctions en jeu. On fixe $f\in\mathscr{E}$, non identiquement nulle, et qui s'annule sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que $f(0)=1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
9. On pose $E=\{x>0, f(x)=0\}$.
   (a) Montrer que E admet une borne inférieure, que l'on note a.
   (b) Montrer que $f(a)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   (c) Montrer que $a>0$.
   (d) Montrer que : $\forall x\in[0,a[,\quad f(x)>0$.
10. On pose $\omega=\dfrac{\pi}{2a}$ et on note $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\cos(\omega x)$.
   (a) Soit $q\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$f\left(\frac{a}{2^q}\right)+1=2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2.$$
   (b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :
$$\forall q\in\mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right)=g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$
   (c) En déduire que :
$$\forall p\in\mathbb{N},\forall q\in\mathbb{N}, f\left(\frac{pa}{2^q}\right)=g\left(\frac{pa}{2^q}\right).$$

(d) Justifier que l'équation précédente reste vraie pour $p \in \mathbb{Z}$.

11. On pose $D_a = \{\dfrac{pa}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.

    (a) Montrer que D_a est dense dans $\mathbb{R}$ (pour $x \in \mathbb{R}$, on pourra considérer la suite de terme général $\frac{\lfloor \frac{2^n x}{a} \rfloor a}{2^n}$).

    (b) En déduire que $f = g$.

    (c) Conclure *très soigneusement* l'exercice.