Exercice 1 Calcul de limites

Calculer les limites des expressions suivantes aux points précisés :

1. $\dfrac{1+x^2}{\sin(x)}$ en 0
2. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$
3. $\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}$ en $+\infty$
4. $\dfrac{\sin(2x)}{3x}$ en 0
5. $\sqrt{1+x^2}-x$ en $\pm\infty$
6. x^x en 0^+
7. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0
8. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin\sqrt{x}}$ en 0

Exercice 2 No limit

Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limites aux points précisés :

1. $\dfrac{x^2\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
2. $\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en 0
3. $\sin(\cos x)$ en $+\infty$
4. $\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0

Exercice 3 Périodicité

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques qui ont une limite en $+\infty$.

Exercice 4 Continuité

Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes, ainsi que leurs éventuels prolongements par continuité aux bornes :

1. $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
2. $x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$

Exercice 5 Indicatrice des rationnels

On note $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui associe 1 à tout rationnel et 0 à tout irrationnel. Montrer que cette fonction n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Équation fonctionnelle : le grand classique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x)+f(y)$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$. Et pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. On pose $a = f(1)$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$.
4. Montrer que f est une fonction linéaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 D'autres équations fonctionnelles

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = f(x)$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$
3. (*) Déteminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Exercice 8 C'est si simple ?

Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^2 = 1$

Exercice 9 Valeur absolue

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $|f|$ est constante sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi. Le résultat est-il vrai si f est à valeurs complexes ?

Exercice 10 Sur tout $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f admet 1 comme limite en $+\infty$ et -1 en $-\infty$. Montrer que f s'annule.
2. On suppose que f admet $+\infty$ comme limite en $\pm\infty$. Montrer que f admet un minimum.
3. On suppose que f admet une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 11 Point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 Limites et caractère borné

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 13 Fonctions périodiques (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ et t un nombre réel. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

Exercice 14

Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui prennent exactement deux fois chaque valeur ? Et trois fois ?

Exercice 15 CC INP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.