Exercice 1 Divisibilité

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n(n+2)(7n-5)$ est divisible par 6.
2. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise n^2+1 ?
3. Soit x, y deux entiers. Montrer que x^2+y^2 est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.
4. Pour quels $n \in \mathbb{Z}$ l'entier $n^2+(n+1)^2+(n+3)^2$ est-il divisible par 10 ?

Exercice 2 Critères

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit n sous forme décimale : $n = \overline{a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0}$

1. À quelle condition sur les a_k n est-il divisible par 2 ? Par 4 ? Par 5 ? Par 10 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 10 par 3 ? Quel est celui de 100 ? Plus généralement, quel est le reste de la division euclidienne de 10^k par 3 pour $k \in \mathbb{N}$? Retrouver un critère connu de divisibilité d'un nombre par 3.
3. Adapter la méthode précédente pour déterminer un critère de divisibilité par 9, puis par 11.

Exercice 3 Restes, congruences

1. Quel est le reste de 1234^{5678} modulo 11 ?
2. Quel est le chiffre des unités de $2021^{2022^{2023}}$?
3. Soit a un entier impair et $n \geq 2$ un entier. Montrer que $a^{2^{n-1}} \equiv 1\,[2^n]$.
4. (*) Soit p supérieur à 4. Montrer que $p^2 \equiv 1\,[24]$.

Exercice 4 Coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$ (on pourra étudier $\binom{2n+1}{n+1}$).

Exercice 5 PGCD

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $n!+1$ et $(n+1)!+1$ sont premiers entre eux.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le PGCD de n^4+n^2+3 et n^3+2n.

Exercice 6 Diophante

Résoudre les équations $16x+26y=4$ et $16x+26y=5$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 7 Diophante strikes again

1. Montrer que l'équation $x^2+y^2=3z^2$ a pour unique solution dans $\mathbb{Z}^3$ le triplet $(0,0,0)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2-10y^2=2$.

Exercice 8 Système de congruences

1. Le système $x \equiv 3[10], x \equiv 4[8]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ a-t-il des solutions ?
2. Si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, à quelle condition le système $x \equiv a[10], x \equiv b[8]$ admet-il des solutions ?

Exercice 9 Valuations p-adiques

1. Montrer que si un entier est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors il est la puissance sixième d'un entier.
2. Soit a,b deux entiers naturels non nuls. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

Exercice 10 Une équation dans les entiers

On cherche à résoudre l'équation $x^y = y^x$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{N}^2, 0 < x < y$. Dans les quatre premières questions, on fixe (x,y) un couple solution.

1. En utilisant les propriétés des valuations p-adiques, montrer que x divise y.
2. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^{k+1} = k+2$.
3. Justifier que $n = x-1$ est positif et que $k+2 \geq kn^2 + (k+1)n + 1$.
4. En déduire que $n \leq 1$, puis en déduire les valeurs possibles de (x,y).
5. Conclure.

Exercice 11 Mersenne

Soit $a \geq 2$ et $n \geq 2$. On suppose $a^n - 1$ premier.

Montrer que $a = 2$.

(*) Montrer que n est premier.
Remarque culturelle : un tel nombre $2^n - 1$ *où n est premier est appelé nombre de Mersenne ; tous ne sont pas premiers, par exemple* $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

Exercice 12 Équations

1. Quels sont les couples d'entiers naturels (x,y) tels que $x \wedge y = 3, x \vee y = 135$?
2. Quels sont les couples d'entiers naturels (x,y) tels que $x + y = 100, x \wedge y = 10$?

Exercice 13 Pourquoi faire simple...

On considère p_1 et p_2 deux nombres premiers supérieurs à 507. Montrer qu'alors $p_1 + p_2$ n'est pas premier.