DS 4 MPSI, le 15/12/2021

Ce DS, qui dure 3 heures, est constitué de 4 exercices. La difficulté est croissante, le quatrième exercice étant assez difficile.

On rappelle que toute réponse doit être justifiée précisément.

Exercice 1 : Une fonction

Soit f la fonction qui, à un complexe z associe, lorsque c'est possible : $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   (b) En déduire tous les antécédents de $1+i$ par f.
3. Soit h un complexe : discuter selon les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.
4. La fonction f est-elle une application surjective de D dans $\mathbb{C}$?
5. La fonction f est-elle une application injective de D dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2 :

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ.
4. On se propose de redémontrer le résultat de la question 3 par une autre méthode.
   (a) Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique et donner sa raison.
   (b) Calculer, en fonction de n, le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ.
5. Montrer que la suite de terme général $w_n = n(u_n - \ell)$ converge, puis donner sa limite.

Exercice 3 :

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$, de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors
$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
2. Établir que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a
$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

3. En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_1$, alors
$$|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
et conclure.
4. Que dire de la réciproque : si $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, a-t-on nécessairement $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge ?
5. Application : on fixe $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite $\ell > 0$. Montrer qu'alors
$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Exercice 4 :

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{U}_n = \{u_k \ ; \ k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules
$$\underline{u}_n = \inf(\mathrm{U}_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(\mathrm{U}_n)$$

1. Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.
Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est ***plus petite*** que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est ***plus grande*** que v.
2. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.
Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :
$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$
3. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
4. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?
On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ***sous-additive*** si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans le reste de l'exercice, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que
$$u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$
et en déduire l'inégalité
$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}$$
6. En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}$$
7. En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.