DS 3 MPSI, le 24/11/2021

Ce DS, qui dure 3 heures, est constitué de deux exercices et d'un problème. Tout document ou matériel électronique est interdit.

Extrait du rapport de concours CC INP 2021 :

« Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé. »

Exercice 1 : Questions de base indépendantes

(a) Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t + t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \ln(t)$.

(b) Calculer $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Résoudre sur l'intervalle $]\,0\,;1\,[$ l'équation différentielle

$$x\ln(x)y'(x) - y(x) = 3x^2\ln(x)^2$$

(d) On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{z}{|z|}$$

i. Quels sont les antécédents de 1 par f ?

ii. Montrer soigneusement que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{U}$.

iii. La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2 : Nombres complexes

On définit le polynôme $\mathrm{P(X)} = \dfrac{1}{2i}\left((\mathrm{X}+i)^5 - (\mathrm{X}-i)^5\right)$.

(a) Donner la définition et les expressions des racines cinquièmes de l'unité.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P (c'est-à-dire que $\mathrm{P}(z) = 0$). Que peut-on dire de $\mathrm{Z} = \dfrac{z+i}{z-i}$?

(c) Exprimer z en fonction de Z.

(d) En déduire toutes les racines du polynôme P (on simplifiera le résultat au maximum). Combien y en a-t-il ?

(e) Vérifier que le polynôme P peut aussi s'écrire sous la forme $\mathrm{P(X)} = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^2 + c$ avec a, b, c des réels que l'on calculera. En déduire une autre expression des racines de P (on pourra réaliser le changement de variable $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$).

(f) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

Problème 3 : Équation différentielle

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \tag{1}$$

Partie 1 : questions préliminaires

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(x) \tag{2}$$

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - y = x \tag{3}$$

(On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de petit degré.)

Partie 2 : analyse

Soit f une solution de (**1**). On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(a) Que peut-on dire de la parité de g et de h ? Exprimer f en fonction de g et h.

(b) i. Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (**2**).

ii. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

(c) i. Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (**3**).

ii. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \beta \operatorname{sh}(x) - x.$$

(d) Déduire des questions précédentes la forme nécessaire de la fonction f.

Partie 3 : synthèse

(a) Vérifier que toutes les fonctions f obtenues précédemment sont bien des solutions de l'équation (**1**) et donner l'ensemble des solutions de (**1**).