# DM 4, pour le 2/12/2021

**Exercice 1 :**

On considère dans cet exercice l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\bar{z}+1}{z-1} \end{array}$$

1. (a) Quels sont les antécédents de 1 par $f$ ?
   (b) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$.
   (c) La fonction $f$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Dans cette question, on note $g$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   (b) Simplifier $g \circ g$.
   (c) En déduire que $g$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ sur lui-même et déterminer sa réciproque.

**Exercice 2 :**

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note $\varphi$ l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{cl} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \to \mathscr{P}(\mathrm{A}) \times \mathscr{P}(\mathrm{B}) \\ \mathrm{X} & \mapsto (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cap \mathrm{B}) \end{array} \right.$$

1. On veut montrer que $\varphi$ est injective si et seulement si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$.
   (a) On suppose que $\varphi$ est injective, mais que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \neq \mathrm{E}$.
      i. Calculer $\varphi(\varnothing)$.
      ii. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $x \notin \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$.
      iii. Que vaut $\varphi(\{x\})$ ? Conclure.
   (b) On suppose que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ tel que $\varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{Y})$.
      i. Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer que $x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{B}$.
      ii. Soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer que si $x \in \mathrm{A}$, on a aussi $x \in \mathrm{Y}$, et qu'il en est de même si $x \in \mathrm{B}$. Que peut-on en conclure ?
      iii. Achever la démonstration en montrant que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$.
2. On veut maintenant montrer que $\varphi$ est surjective si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
   (a) On suppose que $\varphi$ est surjective. En utilisant que $(\mathrm{A}, \varnothing)$ a un antécédent par $\varphi$, montrer que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
   (b) On suppose maintenant que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$. Soient $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$. Trouver un antécédent de $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ par $\varphi$ s'exprimant de manière très simple en fonction de $\mathrm{A}'$ et $\mathrm{B}'$, et conclure.

**Exercice 3 :**

On définit la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \geqslant 1\,,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Montrer que $u$ est croissante.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$$

   (c) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

2. On considère deux suites $a$ et $b$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} a_n = u_n - \ln(n+1) \\ b_n = u_n - \ln(n) \end{cases}$

   (a) Montrer que :

   $$\forall x \in \,]-1\,;+\infty\,[\,,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

   (b) Démontrer que

   $$\forall x \in \,]-\infty\,;1\,[\,,\ x \leqslant \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

   (c) Déduire des deux inégalités précédentes que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

   (d) Montrer que les suites $a$ et $b$ sont adjacentes.