Interrogation de calcul MPSI n°6, le 8/12/2021

Durée : 60 min. Documents et calculatrices interdits. Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Nom et prénom : Note :

Applications

On fixe A, B deux ensembles et $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ une fonction.

1. Donner la définition de : f est injective. (1 point)

2. Donner la définition de : f est surjective. (1 point)

3. Soit $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$. Donner la définition de l'image de A par f (notée $f^{\rightarrow}(\mathrm{A})$). (1 point)

4. Soit $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$. Donner la définition de l'image réciproque de B par f (notée $f^{\leftarrow}(\mathrm{B})$). (1 point)

5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

(a) g est-elle injective ? (répondre « oui » ou « non ») (1 point)

(b) L'image de g est : $\mathrm{Im}(g) = \cdots$ (2 points)

(c) Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel g réalise une bijection sur son image (c'est-à-dire que g est une bijection de I sur $\mathrm{Im}(g)$) : $\mathrm{I} = \cdots$ (2 points)

Suites

6. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. (1 point)

7. Énoncé du théorème de convergence par encadrement / des gendarmes. (2 points)

8. Expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = -1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$: $u_n = \cdots$ (3 points)

9. Pour chacune des suites définies par les expressions suivantes, donner sa limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou écrire « PAS DE LIMITE » le cas échéant. (1 point pour les trois premières suites, 2 points pour la dernière) :

   (a) $\dfrac{\sin n}{n}$:

   (b) $\dfrac{2^n \ln(n)^3 + 3^n}{\sin(3n) - 3^n}$:

   (c) $\left((-1)^n + e^{-n}\right) n^3$:

   (d) $\tan\left(\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{n^2}{n^2+n+1}\right)\right)$: