

Exercice 1 Calcul de primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser :

1. $x \mapsto \cos(3x) + 2 \sin(5x)$

2. $x \mapsto 6e^{-4x}$

3. $x \mapsto xe^{-3x^2}$

4. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$

5. \tan^2

6. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$

7. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}$

8. $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)^2}$

9. $x \mapsto \tan(x)$

10. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

11. $x \mapsto \cos(3x+4)e^{2x+1}$

12. $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

13. $x \mapsto \sin(x)^3 \cos(x)^2$

14. $x \mapsto \sin(x) \operatorname{sh}(x)$

15. $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$

16. $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$

17. $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

18. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-2x+5}$

Exercice 2 Intégrales trigonométriques

Pour p, q dans \mathbb{N}^* , calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt) \cos(qt) dt, \int_0^{2\pi} \sin(pt) \sin(qt) dt$$

Exercice 3 Intégration par parties : intégrales

Calculer, via une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 t \ln(t) dt$

2. $\int_0^{\pi/2} t \sin(t) dt$

3. $\int_0^1 (t-1) \sin(t) dt$

4. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

Exercice 4 Intégration par parties : primitives

Calculer des primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^2 \ln(x)$

2. $x \mapsto x \arctan(x)$

3. $x \mapsto \cos(x)e^x$

4. $x \mapsto \ln^2(x)$

Exercice 5 Changement de variable : intégrales

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable suggéré :

1. $\int_{-1}^1 \operatorname{sh}(t) dt$ avec $y = -t$

2. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt$ avec $y = \sqrt{t}$

3. $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \cos(y)$

4. $\int_1^e \frac{1}{t+t(\ln(t))^2} dt$ avec $y = \ln(t)$

Exercice 6 Changement de variable : primitives

Déterminer des primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions suivantes, par un changement de variable adéquat :

1. $t \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

3. $t \mapsto \frac{e^{2t}}{e^t+1}$

2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}$

Exercice 7 Suite d'intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\cos^n(t) + \sin^n(t)} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{\cos^n(t) + \sin^n(t)} dt$$

1. Calculer $I_n + J_n$.

2. Via le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n , montrer que $I_n = J_n$.

3. En déduire la valeur de I_n et J_n .

Exercice 8 Une suite d'intégrales

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt.$$

Déterminer une relation, pour $n \in \mathbb{N}$, entre I_n et I_{n+2} . En déduire la limite de la suite $(2nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 9 Fonctions définies par des intégrales

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1. $x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

3. $\int_0^x \sqrt{x-t} \sin(t) dt$

2. $x \mapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt$

4. $\int_0^x f(t+x^2) dt$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exercice 10 Premier ordre à coefficients constants

Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = x$

5. $y' + 2y = \sin(x)$

2. $y' + y = e^x$

6. $y' + y = \sin^2(x)$

3. $y' + y = e^{-x}$

7. $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin(x)$

4. $y' + y = \sin(x)$

8. $y' - 3y = e^{3x} + e^x \sin(x)$

Exercice 11 Premier ordre à coefficients non constants

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(x^2 + 1)y' + 2xy + 1 = 0$ sur \mathbb{R}

4. $xy' \ln(x) - y = 2x^2 \ln^2(x)$ sur $]0, 1[$

2. $(1 + e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$ sur \mathbb{R}

5. $(2 + \cos(x))y' + \sin(x)y = (2 + \cos(x)) \sin(x)$ sur \mathbb{R}

3. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1, 1[$

6. $y' \sin(x) - y \cos(x) + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$

Exercice 12 Problème de Cauchy, premier ordre

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et valant 2 en 0 qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (2 - \cos(x))f'(x) + \sin(x)f(x) = 2(2 - \cos(x))\sin(x).$$

(On pourra trouver une solution particulière d'une certaine équation différentielle sous la forme $x \mapsto a + b\cos(x)$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer.)

Exercice 13 Résonance

Soit ω et θ des réels positifs. Résoudre les équations différentielles

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\theta x) \quad \text{et} \quad y'' + \omega^2 y = \sin(\theta x)$$

Exercice 14 Recollement

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$xy' - 2y = x^4.$$

1. Résoudre cette équation sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

On suppose désormais qu'il existe une solution sur tout \mathbb{R} à l'équation différentielle. On la note φ .

2. Que vaut $\varphi(0)$?
 3. À l'aide de la première question, donner la forme de φ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . En déduire une expression de φ par cas sur tout \mathbb{R} .
 4. En examinant la continuité quand $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$, puis la dérivabilité et la continuité de la dérivée de φ , en déduire toutes les solutions de l'équation différentielle.
 5. Y a-t-il existence et unicité de la solution du problème de Cauchy $xy' - 2y = x^4$ sur \mathbb{R} , $y(0) = 0$?
-

Exercice 15 Second ordre à coefficients constants

Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y'' + y' - 2y = 10\sin(x)$ | 4. $y'' + y = \text{sh}(x)$ |
| 2. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$ | 5. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\sin(x)$ |
| 3. $y'' - y = e^x \cos(2x)$ | 6. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)$ |
-

Exercice 16 Problème de Cauchy, deuxième ordre

Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale du second degré.)

Exercice 17 Est-ce une équation différentielle?

Trouver toutes les fonctions dérivables $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $y' + y = \int_0^1 y(t) dt$.

Exercice 18 Toujours pas une équation-diff, mais...

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 19 Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(On pourra, en raisonnant par analyse synthèse, fixer l'une des variables et dériver par rapport à l'autre, puis montrer que la dérivée d'une telle fonction est nécessairement constante. Et on n'oubliera pas la synthèse.)

Exercice 20 Une autre équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 21 Une équation intégrale (*)

Trouver toutes les fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

Exercice 22 Attention à la marche (*)

Résoudre l'équation $y' + y = |x|$ sur \mathbb{R} .
