Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{2+i}{3+i}, \qquad \frac{(2+i)(1-4i)}{1+i}$$

Exercice 2

Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants et l'exprimer sous forme algébrique.

1. $(3+i)(-13-2i)$
2. $i(1-i)^3$
3. $\frac{2-3i}{8+5i}$
4. $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$

Exercice 3

Soit A,B,C les points du plans d'affixes respectives $z_A=-1+i, z_B=2+i, z_C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

1. Placer A,B,C sur un dessin.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\vec{AB},\vec{AC},\vec{BC}$.
3. En déduire les longueurs AB,AC,BC.

Exercice 4

Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_0=1+i$
2. $z_1=-i$
3. $z_2=-\sqrt{3}+i$
4. $z_3=1+2i$
5. $z_4=-\frac{3}{2}-i$
6. $z_5=e^{\frac{2i\pi}{5}}+e^{\frac{-i\pi}{5}}$

Exercice 5

1. Soit $t\in\mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle des complexes suivants (attention aux valeurs de t pour lesquelles ils ne sont pas définis) :

$$z_1=\frac{2+i}{1+2i} \qquad z_2=(1+i)^5 \qquad z_3=\frac{e^{-it}}{1+3i} \qquad z_4=\frac{1}{2-e^{it}}$$

2. Déterminer le module de z_1,z_2,z_3 et z_4.

Exercice 6

1. Soit $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Placer dans le plan complexes les nombres z^n, où $n\in\mathbb{N}$.
2. Même question avec $z=\frac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$.
3. Même question avec $z=\frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$.

Exercice 7 Identité du parallélogramme

Soit $z,z'\in\mathbb{C}$. Montrer que

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right).$$

Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 8 Calculs

1. Déterminer la forme algébrique et le module de $\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$.
2. Simplifier $(1+i)^{20}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, (1+i)^n - (1-i)^n$.
3. Simplifier $(1+i)(1+2i)(1+3i)$. En considérant les arguments, quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 9 Simplifications

1. Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
2. Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 10 Équations

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $|z|+1 = |z+1|$
2. $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$
3. $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$
4. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$
5. $z^2 - 2z + 1 = 0$
6. $z^2 - (9-2i)z + 26 = 0$
7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$
8. $z^3 = \bar{z}$
9. $2z + 3\bar{z} = 1$
10. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
11. $\dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{z+2}{z-3i}$
12. $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$

Exercice 11 Linéarisation

Linéariser $\sin(x)^4$; en déduire une expression simple de la somme

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 12 Calcul de sommes (*)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), S'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \text{ et } S''_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(kx)$$

Exercice 13 Minoration d'une somme

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad |\sin(x)| \geq \frac{1-\cos(x)}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\sin(k)| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin(1)}$.

Exercice 14 Exponentielles complexes

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = 1+i$
2. $e^z = -5-12i$
3. $e^z + e^{-z} = 1$
4. $e^z + 2e^{-z} = i$

Exercice 15 Encore des calculs de cosinus et de sinus

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire une expression explicite de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 16 Géométrie

Soit $z \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que :

1. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs colinéaires.
2. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
3. 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
4. (*) z et ses deux racines carrées soient les affixes de trois points formant un triangle rectangle en z.

Exercice 17 Théorème de l'angle au centre

On considère trois points A, B, C distincts du cercle de centre O et de rayon 1 d'affixe respectifs a, b, c.

1. Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\theta_A}$, $b = e^{i\theta_B}$ et $c = e^{i\theta_C}$.
2. Montrer que
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}}}{e^{i\frac{\theta_A+\theta_C}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_C}{2}\right)}.$$
3. En déduire que
$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\theta_B-\theta_A}{2}\ [\pi].$$
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 18 Un théorème classique de géométrie plane

Soit ABC un triangle dont les points ont pour affixes a, b et c.

1. Montrer que l'orthocentre de ABC a pour affixe $a+b+c$.
2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.
Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite par laquelle passent ces trois points est appelée ***droite d'Euler*** *du triangle, dont l'étude est un classique de la géométrie du triangle.*

Exercice 19 (*) Équilatéritude

Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c, tous distincts.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$, et un triangle équilatéral indirect si et seulement si $a + jc + j^2b = 0$.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 20 CC INP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 21 CC INP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.