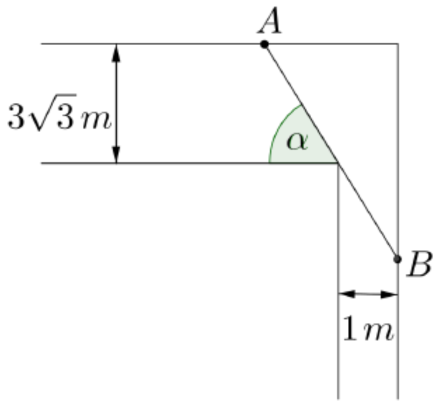
DS 2 MPSI, le 20/10/2021

Ce DS, qui dure 2 heures, est constitué d'un exercice et d'un problème.
N'oubliez pas de faire très attention à la rédaction et au soin apportés à votre copie. Bon courage !

Exercice 1 : Trigonométrie appliquée Un couloir de musée de largeur $3\sqrt{3}$ mètres tourne à angle droit et sa largeur n'est plus que de 1 mètre. On veut transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. L'objectif est de déterminer la largeur maximale possible du tableau que l'on peut ainsi déplacer dans le couloir.



1. Montrer que, avec les notations de la figure ci-dessus :

$$\mathrm{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

   On pose $\mathrm{AB} = f(\alpha)$. On se propose d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

2. Justifier que f est dérivable sur I puis calculer f'.
3. On veut déterminer le signe de f' sur I. Soit $\alpha \in \mathrm{I}$.
   (a) Justifier que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3}\cos^3(\alpha)$.
   (b) Soient a et b des réels. Rappeler la factorisation de $a^3 - b^3$ par $a - b$.
   (c) En déduire que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3}\cos(\alpha)$.
   (d) En déduire le signe de f' sur I.
4. Dresser le tableau de variations de f sur I. Quelle est la largeur maximale du tableau que l'on peut transporter dans le couloir ?

Problème 2 : Argument tangente hyperbolique L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction réciproque de la tangente hyperbolique, l'*argument tangente hyperbolique*, notée Argth.

Dans tout le problème, on considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **Définition en tant que réciproque**
   (a) Rappeler sans démonstration le tableau de variations de th.
   (b) Démontrer que th admet une réciproque, que nous noterons Argth, et donner son tableau de variations.
   (c) Exprimer, en justifiant le résultat, th' en fonction de th.
   (d) Étudier la dérivabilité de Argth et déduire de la question précédente une expression explicite de Argth'.
   (e) Étudier la position relative de la courbe de Argth et de sa tangente au point d'abscisse 0.
   (f) Tracer sur un même dessin les courbes de $\operatorname{th}, \operatorname{Argth}$ et la droite d'équation $y = x$.
2. **Expression explicite de l'argument tangente hyperbolique**
   (a) On fixe $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $y = \operatorname{th}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression explicite de $\operatorname{Argth}(y)$. *(Attention à bien distinguer les cas sur y !)*
   (b) Retrouver, à partir de cette expression, l'expression de $\operatorname{Argth}'(y)$ obtenue à la question 1.d.
3. **Une étude de fonction**
   On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Argth}\left(\dfrac{3\operatorname{th}(x)+1}{3+\operatorname{th}(x)}\right)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f, ainsi qu'une expression simplifiée de $f'(x)$ lorsque c'est possible.
   (c) En déduire une expression simplifiée de f.
4. **Une autre étude de fonction**
   On considère la fonction $g : x \mapsto \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = \operatorname{ch}(x)$. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$.
5. **Un calcul de somme**
   (a) Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$, alors
   $$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$$
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$\operatorname{Argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$$
   (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite de terme général
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$$