DM 3, pour le 9/11/2021

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx), \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$

1. Calculer $\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.
   (b) Rappeler, avec démonstration, l'expression de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (attention à certaines valeurs de θ).
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n$ (attention à certaines valeurs de x).
3. En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n.

Exercice 2 :

On cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0. \tag{E}$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.
   (a) Calculer $(u + v)^3$ de deux manières différentes.
   (b) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$. Donner la valeur de u^3v^3.
   (c) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $\mathrm{Z}^2 + 4\mathrm{Z} + 8 = 0$ d'inconnue $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$.
   (d) Résoudre l'équation $\mathrm{Z}^2 + 4\mathrm{Z} + 8 = 0$.
2. On pose $w = -2 + 2i$.
   (a) Écrire w sous forme exponentielle.
   (b) Résoudre l'équation $\mathrm{Z}^3 = w$ d'inconnue $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
   (c) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de $\mathrm{Z}^3 = w$ est
   $$\left\{1 + i,\ (1 + i)j,\ (1 + i)j^2\right\}.$$
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u, puis pour chacune d'entre elles, celles de v et de z. Porter tous les résultats simplifiés au maximum dans un tableau (inutile de présenter tous les détails de calcul).
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 3 :

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$\mathrm{I}(p, q) = \int_0^1 t^p (1 - t)^q \, \mathrm{d}t$$

1. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\mathrm{I}(p, q)$, puis calculer $\mathrm{I}(0, 0)$, $\mathrm{I}(1, 0)$ et $\mathrm{I}(1, 1)$.
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, la relation de symétrie : $\mathrm{I}(p, q) = \mathrm{I}(q, p)$.
3. Que vaut $\mathrm{I}(p, 0)$?
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer la relation $\mathrm{I}(p, q + 1) = \dfrac{q + 1}{p + 1}\, \mathrm{I}(p + 1, q)$.
5. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\mathrm{I}(p, 1)$, pour $p \in \mathbb{N}$, puis celle de $\mathrm{I}(p, 2)$.
6. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}(p, q) = \dfrac{p!\ q!}{(p + q + 1)!}$.
   Conseil : s'inspirer du travail réalisé dans la question précédente.
7. En déduire la valeur de l'intégrale $\mathrm{J}(p, q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1} \, \mathrm{d}\theta$.
   Indication : utiliser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$