TD 3 — Rappels et compléments sur les fonctions

Exercice 1 *Composées*

On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \sqrt{x+3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Calculer les ensembles de définition des fonctions $g \circ f$ et de $f \circ g$, et déterminer une expression explicite de ces fonctions.

Exercice 2 *Graphes*

Tracer le graphe des fonctions suivantes le plus précisément possible :

1. $x \mapsto \sqrt{2x-3}+1$
2. $x \mapsto \frac{3}{2x-1} - 2$

Exercice 3 *Monotonie*

1. La somme de deux applications croissantes est-elle nécessairement croissante ?
2. Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement croissant ?
3. La composée de deux applications croissantes est-elle nécessairement croissante ?
4. Que dire de la composée de deux applications décroissantes ? Et de deux applications monotones ?

Exercice 4 *Existence et unicité d'une solution*

Montrer, en faisant une étude de fonction, que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par

$$x^5 + x + 1 = 0$$

possède une unique solution.

Exercice 5 *Dérivation*

Donner le domaine de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes : :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{4+x}}$;
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+6x-1}$;
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$;
5. $f_5 : x \mapsto \ln(\ln x)$;
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}}$;
7. $f_7 : x \mapsto \left(1+x^4\right)^{1-2x}$
8. $f_8 : x \mapsto \exp(1 - x\sin(x))$
9. $f_9 : x \mapsto \ln(4x+3)$
10. $f_{10} : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(4x-x^2)}$
11. $f_{11} : x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$
12. $f_{12} : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$

Exercice 6 *Dérivées n-ièmes*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de :

$$f : x \mapsto \cos x, \quad g : x \mapsto e^{ax+b}$$

Exercice 7 *Fonctions bornées*

Montrer que

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$;
2. $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 *Une équation*

Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 *Vers la méthode de Newton*

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, x_0 un réel tel que $f'(x_0) \neq 0$. Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 recoupe l'axe (Ox).
2. On suppose que $a > 0$ et que f est la fonction $x \mapsto x^2 - a$. Montrer que

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

Exercice 10 *Inégalités*

Montrer que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^x \geq x+1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \sin x \leq x$.

Exercice 11 *Étude d'une équation*

On fixe $p \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation

$$x^5 - 5x = p?$$

Exercice 12 *Limites*

Trouver les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$
2. $x \mapsto \frac{x+7}{4x+3}$
3. $x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1}$
4. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$
5. $x \mapsto \cos(x^2)e^{-x}$
6. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$
7. $x \mapsto \frac{50x+x\ln(x)}{x\ln(x)+3}$
8. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$
9. $x \mapsto \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

Exercice 13 *Limites, deuxième*

Trouver les limites suivantes aux points indiqués :

1. $\frac{\cos x - 1}{x}$ quand $x \to 0$
2. $\frac{\sin(5x)}{x}$ quand $x \to 0$
3. $\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$ quand $x \to 0$
4. $\frac{\ln(x)}{x-1}$ quand $x \to 1$.

Exercice 14

Calculer sans calculatrice $\sin(x), \cos(x)$ et $\tan(x)$ pour $x \in \left\{-\frac{17\pi}{6}, \frac{47\pi}{3}\right\}$.

Exercice 15

1. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16

1. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $\cos(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.
2. De même avec $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2x)$. On pourra par exemple transformer le sinus en cosinus.

Exercice 17

À quelle condition sur le réel x est-ce que $\tan(3x) - 3\tan(x)$ est défini ? Résoudre alors $\tan(3x) = 3\tan(x)$.

Exercice 18

1. Résoudre l'inégalité $\sin(x)(2\cos(x) - 1) \geq 0$ (on commencera par un tableau de signes sur $[0, 2\pi[$).
2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inégalité $\sin(x) \geq \sin(2x)$.

Exercice 19

Soit $a \in [-\pi, \pi]$. Exprimer $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $\cos(a)$.

Exercice 20 *Inégalités*

Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin(x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

Exercice 21 *Étude de fonction*

1. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) > x$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$ est bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur son image que l'on précisera.

Exercice 22 *Étude de fonction et équation*

1. Étudier la fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\cos(x)^3 + \sin(x)^3 = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 23 *Calculs*

Simplifier :

1. $\arccos\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
2. $\arcsin\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$
3. $\arctan\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$
4. $\arcsin\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
5. $\arccos\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)$

Exercice 24 *Une inégalité*

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \qquad \arctan(x) \geq \frac{x}{1+x^2}$

Exercice 25 *Des simplifications miraculeuses*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
2. Simplifier de la même manière :
   (a) $\sin(2\arccos x)$ (pour $x \in [-1,1]$)
   (b) $\sin(2\arctan x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
   (c) $\tan(\arccos x)$ (pour $x \in [-1,1]$)
   (d) $\cos(3\arccos x)$ (pour $x \in [-1,1]$)
3. Résoudre l'équation $\arctan(2x) = \arcsin(x)$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

Exercice 26 *Équations*

Résoudre les équations d'inconnue x, dans un domaine à préciser :

1. $\arcsin(2x) = \arccos(x)$
2. $\arcsin(\tan x) = x$
3. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$
4. (*) $\arcsin(x+1) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 27 *Étude de fonction*

Étudier la fonction f (domaine de définition, de dérivabilité, dérivée, tableau de variations, représentation graphique) définie pour tout x dans un domaine à préciser donnée par $f(x) = \arctan \frac{2(1-x)}{2x-x^2}$.

Exercice 28 *Formule d'addition pour* arctan *(*)*

1. Soit $a > 0$. On considère la fonction $f_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$. Étudier f_a sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{1}{a}[$ et $]\frac{1}{a}, +\infty[$.
2. Même question avec $a < 0$.
3. Déduire des questions précédentes que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:
$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$$
avec $k = 0$ si $ab < 1$, $k = 1$ si $ab > 1$ et $a > 0$ et $k = -1$ sinon.

Exercice 29 *Identités de trigonométrie hyperbolique*

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
3. $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

Exercice 30 *Inégalités*

Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \operatorname{sh}(x) \geq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$

Exercice 31 *Une identité*

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$

Exercice 32 *Une inégalité (*)*

1. Déterminer l'ensemble de définition I de $x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$.
2. Montrer que : $\forall x \in I \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 33 *(**)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ dérivable vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq f(x)$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 34 *Comme en DS : une fonction et un point singulier*

On étudie dans cet exercice la fonction $f\ : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x :
$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$
avec égalité à droite si et seulement si $x = 0$.
2. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que $\forall x > 0$:
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$
Conseil : faire le calcul de façon méthodique et appliquée.
4. Calculer $f(1)$, puis déduire de ce qui précède une expression simple de $f(x)$ pour $x > 0$.
5. Que peut-on dire de la relation précédente pour $x = 0$? et pour $x < 0$?
6. Tracer proprement l'allure du graphe de f.
