

Exercice 1

De quelle(s) variable(s) dépendent les sommes suivantes ?

1. $\sum_{i=0}^{100} (\cos(i) + i^2)$

4. $\sum_{j=1}^i x^j$

2. $\sum_{i=0}^n x^i$

5. $\sum_{j=1}^i x^k$

3. $\sum_{i=1}^{100} x^i$

6. $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$

Exercice 2

Soit $n \geq 5$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n (3k - 2)$

8. $\sum_{i=1}^n i(i-1)$

2. $\sum_{k=0}^{n^2} (5s + 1)$

9. $\sum_{j=1}^n (2j - 1)$

3. $\sum_{i=4}^{n-1} (2^i + 3)$

10. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$

4. $\sum_{j=3}^n (\ln(j+1) - \ln(2j))$

11. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max\{i, j\}$

5. $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p$

12. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$

6. $\sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i$

13. $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

7. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$

14. $\sum_{k=3}^{n+1} k$

15. $\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$

4. En admettant l'existence de $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, en déduire un encadrement de L .

Exercice 4

Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=1}^n 2^k$$

$$3. \prod_{k=1}^n 4^{k^2+1}$$

$$2. \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k+2}$$

$$4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \text{ (et la limite quand } n \rightarrow +\infty)$$

Exercice 5

Montrer que :

$$1. \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$2. \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k$$

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Exercice 7

Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

Exercice 8

Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$. On pourra soit utiliser une relation sur les coefficients binomiaux, soit considérer et dériver de deux façons différentes la fonction $x \mapsto (x+1)^n$. Adapter pour calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2$.

Exercice 9

Soit n un entier avec $n \geq 2$. On pose : $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$1. \text{ Montrer que } P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

$$2. \text{ Calculer } \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \text{ et } \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \text{ pour en déduire } P_n.$$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(x-1)^2}.$$

En déduire une formule pour $\sum_{k=1}^n kx^k$.

Exercice 11

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dédurre de la question précédente une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

3. Quelle est la limite de U_n quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 12 (*)

Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 13 Systèmes linéaires sans paramètres

Résoudre les systèmes suivants :

1.

$$(S_1) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} .$$

3.

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ y + 2z - t = -1 \\ -y - z - 2t = 2 \end{cases} .$$

2.

$$(S_2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases} .$$

4.

$$(S_4) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \end{cases} .$$

Exercice 14 Systèmes linéaires avec paramètres

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur a, b, c , le système

$$(S_5) \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x - 3y + 3z = b \\ x + y - 4z = c \end{cases}$$

admet-t-il au moins une solution ? Résoudre ce système pour $a = b = c = 0$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant la valeur de m , le nombre et l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S_6) \begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases} .$$

3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$(S_7) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$(S_8) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$
