

Exercice 1 *Calculs algébriques*

Soit a, b, c des réels. Développer les expressions suivantes, en faisant le maximum de calculs de tête :

- | | |
|--------------|-------------------------------|
| 1. $(a+b)^3$ | 3. $(a+b+c)^2$ |
| 2. $(a+b)^4$ | 4. $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$ |

Exercice 2 *Puissances : simplifications*

Soit n un entier naturel. Calculer les expressions suivantes en simplifiant au maximum :

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 1. $2^n + 2^n$ | 4. $3^n 9^n$ |
| 2. $3 \times 4^n + 2^{2n}$ | 5. $2^{n+1} - 2^n$ |
| 3. $3^{2n} 4^n$ | 6. $27^{2n} \times 3^n$ |

Exercice 3 *Fractions : simplifications*

Soit n un entier plus grand que 2. Simplifier les expressions suivantes au maximum en les écrivant sous forme de fractions irréductibles :

- | | | |
|---------------------------------|--|---|
| 1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | 5. $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$ | 9. $\frac{\binom{n}{n+1}}{\binom{n-1}{n+1}}$ |
| 2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ | 6. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ | |
| 3. $\frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ | 7. $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 10. $\frac{\binom{1}{n^2-1}}{\binom{1}{n-1}}$ |
| 4. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ | 8. $\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1}$ | |

Exercice 4 *Encadrement*

Sans l'aide de la calculatrice, ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$(-0,4)^3, \quad (0,1)^2, \quad (-0,1)^3, \quad (0,1)^4, \quad \frac{5}{2}, \quad \sqrt{10}.$$

Exercice 5 *Radicaux*

Simplifier les expressions suivantes (sans radicaux au dénominateur) :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $A = \frac{1}{5-2\sqrt{2}}$ | 3. $C = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ | 5. $E = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ |
| 2. $B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}$ | 4. $D = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ | |

Exercice 6 *Vrai ou faux ?*

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Dans le cas où une affirmation est fausse, on donnera un contre-exemple.

1. Si a et b sont des réels tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
2. Si a et b sont des réels non nuls tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
3. Si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a} \leq a$.
4. Si $a \in \mathbb{R}$, alors $a \leq a^2$.
5. Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
6. Si $a < 0$, alors $\sqrt{a^2} < 0$.

Exercice 7 *Équations*

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{x-1}{2x} = \frac{x}{2x-1}$
2. $8x^3 - 27 = 0$
3. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 1$
4. $(x+3)^{2020} = (x+3)^{2022}$
5. $x = \sqrt{x} + 12$
6. $|4-x| = x$
7. $|x+2| + |2x-8| = 3$
8. $\sqrt{1-2x} = |x+7|$
9. $x + |x| = \frac{2}{x}$
10. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$
11. $(m+2)x + 4(2m+1) = m^2 + 4(x-1)$ (selon la valeur de m)
12. $(m^2-1)x = m(m+1)(m+2)$ (selon la valeur de m)

Exercice 8 *Inéquations*

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $|x+2| < 2x-5$
2. $2x+1 \leq \sqrt{x^2+8}$
3. $x + \frac{1}{x} \geq 0$
4. $|x-1| < |2x+1| + 1$
5. $3 - 27x^2 \leq 0$
6. $\frac{1-x^2}{2x-2} > \frac{3-x}{2}$
7. $\sqrt{x+1} > \sqrt{2x^2+x}$

Exercice 9 *Équation dépendant d'un paramètre*

Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ (d'inconnue x).

Exercice 10 *Manipulation d'exponentielles et de logarithmes*

Simplifier les expressions :

1. $(e^x)^5 \times e^{-2x}$
2. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$
3. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$
4. $\ln(81)$
5. $\ln\left(\frac{49}{12}\right)$
6. $3 \ln(x^2)$
7. $\ln(x^2 + 2x + 1)$
8. $\ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exercice 11 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Soit a, b, c, d quatre nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Montrer que $a = c$ et que $b = d$.

Exercice 12 *Des nombres irrationnels*

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
 2. Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.
 3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.
-

Exercice 13 *Vrai ou faux ?*

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Une preuve est attendue.)

1. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
 2. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
 3. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
 4. Le produit d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
-

Exercice 14 *Réurrences*

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. Pour tout entier naturel n , pour tout réel positif x , $(1+x)^n \geq 1+nx$.
 2. Pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq 6n+7$.
 3. Pour tout entier naturel n , $2^{2n}+2$ est divisible par 3.
 4. Pour tout entier naturel n , 4^n-1 est divisible par 3.
 5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$
 6. Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2$.
-

Exercice 15 *Inégalité arithmético-géométrique*

1. Soit a, b des réels. Montrer que

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

2. En déduire que, si x et y sont des réels positifs, on a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

avec égalité si et seulement si $x = y$.

3. On se donne un rectangle de demi-périmètre p . Montrer que son aire est majorée par $p^2/4$. Quels sont les rectangles qui réalisent l'égalité?
-

Exercice 16 *Trinôme*

Selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de racines réelles du trinôme $x^2 + mx + 1$, puis le signe de ce trinôme sur \mathbb{R} .

Exercice 17 *Traduction français \rightarrow mathématiques*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec des quantificateurs), puis écrire leurs négations :

1. f est croissante.
 2. f s'annule.
 3. f est la fonction nulle.
 4. f n'est pas une fonction constante.
 5. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
 6. f s'annule au plus une fois.
-