DS 1 MPSI, le 29/09/2021

Ce DS, qui dure 2 heures, est constitué de 3 exercices. L'exercice 3 est plus théorique et n'est à aborder que si vous avez très bien réussi les deux premiers.

N'oubliez pas de faire très attention à la rédaction et au soin apportés à votre copie. Bon courage !

Exercice 1 : Calcul de la somme des n premiers cubes d'entiers

1. Rappeler sans justifier la *relation de Pascal* sur les coefficients binomiaux.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer *par récurrence* sur n que pour tout $n \geqslant p$, on a
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
3. Vérifier cette égalité lorsque $p = 2$ et $n = 4$, en détaillant chaque terme de la somme.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va exploiter l'égalité de la question 2 pour calculer la valeur de la somme
$$\mathrm{S}_n = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) + \cdots + ((n-1) \times n).$$
   (a) Exprimer S_n à l'aide du symbole $\sum$.
   (b) Rappeler pour un entier $m \geqslant 2$ l'expression de $\binom{m}{2}$.
   (c) En déduire la valeur de S_n.
   (d) Retrouver à l'aide de ce résultat l'expression vue en cours de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
5. Par un raisonnement analogue à celui fait pour calculer S_n, donner la valeur de
$$\mathrm{T}_n = (1 \times 2 \times 3) + (2 \times 3 \times 4) + (3 \times 4 \times 5) + \cdots + (n-2) \times (n-1) \times n.$$
6. En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 2 : Somme géométrique dérivée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$
Le but du problème est de calculer T_n de deux manières différentes.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathrm{T}_n = \frac{5^{n+1} - 4^n \times (n+5)}{5^{n-1}}.$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x réel,
$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}.$$

7. Exprimer T_n à l'aide de la fonction S_n.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$. Donner sans démonstration la valeur de
$$\sum_{k=1}^{n} x^k.$$
9. Dans cette question, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction
$$f_n : x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de $\mathrm{S}_n(x)$.

10. En déduire à l'aide de la question 3 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel différent de 1,

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

11. Retrouver le résultat de la question 1 sans récurrence.

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{Pour tout} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

Dans les questions 1 à 4, on fixe une fonction f qui vérifie cette propriété.

1. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = -1$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
3. On suppose dans cette question et la suivante que $f(0) = -1$. Montrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.
4. Montrer que si $f(1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = t - 1$. Montrer que si $f(-1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = -t - 1$.
5. Conclure l'exercice.