DM 2, pour le 7/10/2021

Exercice 1 : Des sommes de puissances

Pour m un entier naturel non-nul et n entier naturel, on pose

$$\mathrm{S}_{n,m} = \sum_{i=0}^{n} i^m$$

1. Rappeler sans démonstration, les valeurs pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $\mathrm{S}_{n,1}$, $\mathrm{S}_{n,2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{S}_{n,3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \mathrm{S}_{n,4} = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

3. L'objectif de cette question est de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathrm{S}_{n,5}$.
   (a) Pour a et b réels, développer $(a-b)^5$.
   (b) Déduire de la question précédente et du changement d'indice $i = n - j$ que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_{n,5} = \frac{1}{2}\left(5n\mathrm{S}_{n,4} - 10n^2\mathrm{S}_{n,3} + 10n^3\mathrm{S}_{n,2} - 5n^4\mathrm{S}_{n,1} + n^5(n+1)\right)$$

4. On souhaite calculer $\mathrm{A} = 1^5 + 3^5 + \cdots + 2021^5$.
   (a) Écrire A avec le symbole $\sum$.
   (b) On pose $\mathrm{B} = 2^5 + 4^5 + \cdots + 2020^5$. Justifier que $\mathrm{B} = 32\mathrm{S}_{1010,5}$ et en déduire que

$$\mathrm{A} = \mathrm{S}_{2021,5} - 32\mathrm{S}_{1010,5}.$$

Exercice 2 : Étude de fonction, calculs de limites

On étudie

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty\,;0\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$ et calculer sa dérivée sur cet ensemble.
3. En déduire les variations de f. Calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. En déduire que f admet un minimum m sur son ensemble de définition, calculer sa valeur.
5. On fixe un réel $\alpha > m$. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \alpha$, d'inconnue $x \in \mathrm{D}_f$.
6. f est-elle dérivable (à gauche) en 0 ? Le cas échéant déterminer la tangente de f au point d'abscisse 0.

Soit g une fonction définie sur un intervalle de type $]\,\mathrm{A},\,;+\infty\,[$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote* au graphe de g en $+\infty$ si et seulement si $g(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

7. Montrer que si la droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe d'une fonction g en $+\infty$, alors $g(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$.
8. On suppose que $\mathrm{D} : y = ax + b$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$. Montrer que $a = 1$.
9. Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} - 1\right)$$

   et en déduire la limite de $f(x) - x$ lorsque $x \to +\infty$.
10. En déduire une asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Exercice 2 : Fonction trigonométrique réciproque

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[\,0\,;\pi\,[$. Préciser les transformations géométriques nécessaires pour obtenir toute la courbe de f.
3. On cherche à simplifier l'expression de f par deux méthodes différentes :
   (a) **Première méthode**
   Redémontrer les formules qui expriment $\cos(t)^2$ et $\sin(t)^2$ en fonction de l'angle $2t$, pour $t \in \mathbb{R}$.
   En déduire une expression simplifiée de f sur $[\,0\,;\pi\,[$.
   (b) **Seconde méthode**
   Préciser l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer f' sur cet ensemble.
   En déduire f sur $[\,0\,;\pi\,[$.
4. Donner une représentation graphique de f sur son ensemble de définition.