DM 1, pour le 9/09/2021

Consignes de présentation :

Ces consignes sont valables pour les DM et les DS. Les enfreindre entraînera une non-correction de tout ou partie de la copie (comme cela serait d'ailleurs le cas aux concours) :

- Utilisez des copies doubles.
- Écrivez votre nom sur chaque copie (en revanche, la classe n'est pas utile...).
- Numérotez les copies.
- Numérotez les questions. Vous pouvez traiter les questions dans un ordre différent de celui de l'énoncé, notamment en DS, mais dans ce cas il faut l'écrire explicitement.
- Barrez proprement si nécessaire (pas de correcteur liquide, pas de rature).
- Soulignez ou encadrez les résultats.
- Formez une marge (si vous utilisez des copies à petits carreaux) et n'écrivez pas dedans (dans tous les cas). Aérez votre copie : sautez des lignes entre les questions. Laissez un espace (entre un quart et une demi-page) en haut de votre première copie pour que le professeur puisse y inscrire des remarques.

Consignes pour le travail :

Le but des DM est double. Tout d'abord, les DM permettent de progresser en rédaction mathématique, en étant corrigé par son professeur. Ils fournissent donc un excellent entraînement aux DS (le calendrier est d'ailleurs prévu pour que, sauf événement imprévu, je rende systématiquement les DM avant le DS suivant). Par ailleurs, les DM sont l'occasion d'aborder des problèmes parfois plus originaux ou plus difficiles que ce que vous aurez l'occasion de voir en DS. En conséquence :

- Les DM commencent toujours par des exercices ou des questions élémentaires, que vous devez absolument chercher et rédiger seuls.
- En revanche, il n'est pas rare de croiser des questions plus difficiles ou demandant de l'initiative. Il est bien sûr positif de chercher ces questions en groupe, pendant la pause du déjeuner, ou après les cours. Il est autorisé, voire recommandé, de me poser des questions si vous avez des doutes sur votre démarche : directement après les cours, pendant le TD, par mail...
- L'attitude la pire qu'on puisse avoir face à un DM consiste à s'y mettre la veille au soir (voire le matin...), en faisant semblant de travailler et en recopiant vaguement ce qu'une ou un camarade plus consciencieux aurait fait avant. Cela ne trompe personne, et surtout, cela ne vous fait absolument pas progresser ; pire, cela vous fait culpabiliser pour absolument rien. Il faut s'y mettre en avance, et ce n'est pas grave si vous ne les finissez pas !

Ce DM est constitué de quatre exercices ; la difficulté est relativement croissante.

Exercice 1 : Équations, inéquations

1. Résoudre l'inéquation
$$\frac{4+x}{5-x} \leqslant 3$$
d'inconnue $x \neq 2$.
2. Résoudre l'inéquation
$$|x+2| < 3$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{x-1}$$
d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.
4. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ de sorte que l'inéquation
$$(2m-1)x^2 - 2x + 4m - 3 > 0$$
soit vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Qui implique quoi ?

Dans chacun des cas suivants, relier les deux assertions par un « si ... alors ... » dans le bon sens, un « si et seulement si », ou rien du tout. Pour chaque lien écrit ou non-écrit, justifier très soigneusement par une preuve ou un contre-exemple.

1. Pour tous réels x et y,
$$(x = y) \qquad (\sin(x) = \sin(y))$$
2. Pour tous réels x et y,
$$(x \leqslant y) \qquad (x^2 \leqslant y^2)$$
3. Pour tous réels strictement positifs x et y,
$$(\ln(x) < \ln(y)) \qquad (x < y)$$
4. Pour tout entier naturel m,
$$(m \text{ est pair}) \qquad (m \text{ est un multiple de } 8)$$

Exercice 3 :

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe des entiers relatifs a et b tels que
$$n = 3a + 5b.$$

Exercice 4 :

Soit a, b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$
Le but de l'exercice est de calculer u_n en fonction de n et u_0, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Traiter le cas $a = 1$ (c'est un théorème de 1ère mais on en (re)fera la démonstration, par récurrence).

On suppose désormais $a \neq 1$.

2. Montrer que l'équation $x = ax + b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution. On note celle-ci ℓ dans la suite.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Conclure.
4. À quelles conditions sur a et b la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?