MPSI : DS 9, le 2/06/2021

Ce devoir est constitué d'un exercice et de deux problèmes. Les élèves ayant eu 15 ou plus au dernier devoir peuvent ne traiter que les problèmes. Les élèves ayant eu moins de la moyenne doivent se concentrer sur l'exercice 1, le problème 2 et éventuellement la première partie du problème 3.

Exercice 1 : questions de base

1. Questions de cours : on considère une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   (a) Donner la définition du déterminant de A.
   (b) Démontrer que le déterminant de la transposée de A est égal au déterminant de A.
   (c) Donner la définition des cofacteurs de A.
   (d) On note Com(A) la comatrice de A (c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A). Montrer que
   $$\mathrm{A} \times \mathrm{Com(A)}^{\mathrm{T}} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$
2. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On considère l'application φ définie comme suit :
   $$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \quad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}'$$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de E.
   (c) Déterminer l'image et le noyau de φ.
   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est bijectif si et seulement si $\lambda \notin \{0, 2, 6\}$. (On pourra calculer le déterminant de $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3$.)
   (e) Donner une base du noyau de $\varphi - 6\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.
3. Soit X une variable aléatoire. On considère la variable aléatoire $\mathrm{Y} = 2^{\mathrm{X}}$. Calculer l'espérance de Y dans les cas suivants (où $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$) :

   (a) $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (b) $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;\,100]\!])$ (c) $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Problème 2

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall on peut accéder à un ascenseur qui dessert chaque étage. 5 personnes y montent ensemble.

On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages, et ce de manière équiprobable et indépendamment des autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne redescend pas.

On note, pour $i \in [\![1\,;\,3]\!]$, X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro i.

Le but du problème est d'évaluer le nombre moyen d'arrêts de l'ascenseur.

1. (a) Justifier que X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Préciser son support $\mathrm{X}_1(\Omega)$ et toutes les probabilités associées (mais ne pas faire les calculs).
   (b) Donner $\mathbf{E}(\mathrm{X}_1)$ et $\mathbf{V}(\mathrm{X}_1)$ sans justification.
   (c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
2. (a) Justifier l'égalité d'événements
   $$[\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 0] \; = \; [\mathrm{X}_3 = 5].$$
   (b) En déduire $\mathbf{P}\big([\mathrm{X}_1 = 0] \cap [\mathrm{X}_2 = 0]\big)$.
   (c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une seule fois est $\frac{1}{81}$.

On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

4. (a) Donner le support $Z(\Omega)$ de Z.
   (b) Justifier que $\mathbf{P}([Y_1 = 0]) = \mathbf{P}([X_1 = 0])$ et calculer cette valeur.
   (c) En déduire $\mathbf{P}([Y_1 = 1])$ puis $\mathbf{E}(Y_1)$. *Indication :* $3^5 = 243$.

On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1.

5. Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $\mathbf{E}(Z)$ et vérifier que

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{211}{81}.$$

Problème 3

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et T un endomorphime non nul de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base.
On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.
On appelle projecteur un endomorphisme P de E idempotent, c'est-à-dire tel que $P^2 = P$.

Partie 1 : Traces et projecteurs

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le nombre réel suivant :

$$\mathrm{Tr}\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathcal{B}$.
   On appelle trace de T, notée $\mathrm{Tr}\,(T)$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.
   Soit P un projecteur de E.
3. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\,(P) \oplus \mathrm{Ker}\,(P)$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}\,(P) = \mathrm{Tr}\,(P)$.
   On pose $P' = \mathrm{Id}_E - P$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}\,(P') = \mathrm{Ker}\,(P)$ et que $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Ker}\,(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer alors que si l'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs P_i, $i = 1, \dots, m$, alors $\mathrm{Tr}\,(S) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}\,(S) \geqslant \mathrm{rg}\,(S)$.

Partie 2 : Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

1. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.
   Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ une base de E adaptée à la décomposition

$$E = \mathrm{Im}\,(P) \oplus \mathrm{Ker}\,(P).$$

2. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & * & & * \\ \hline * & & & \\ & & \mathbb{B} & \\ * & & & \end{array}\right),$$

   où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question précédente et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini à la question précédente, n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = \mathrm{Id}_E - P$.

Partie 3 : Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

1. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que x et $\mathrm{T}(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante ;

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

   où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.
   Soit t_i, $i = 1, \ldots, n$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}) = \sum_{i=1}^{n} t_i$.
4. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i, $i = 1, 2$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur L de E de rang 1, tel que d'une part $\mathrm{LTL} = t\mathrm{L}$ et d'autre part $\mathrm{L}'\mathrm{TL}'$ ne soit pas proportionnel à $\mathrm{L}' = \mathrm{I} - \mathrm{L}$.
5. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 2 et 3 de la partie 2, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & * & & * \\ \hline * & & & \\ & & \mathbb{B} & \\ * & & & \end{array}\right),$$

   où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.
6. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_1, $i = 1, \ldots, n$.

Partie 4 : Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}) \geqslant \mathrm{rg}\,(\mathrm{T})$. On pose $\rho = \mathrm{rg}\,(\mathrm{T})$ et $\theta = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T})$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & 0 \\ \hline \mathbb{T}_2 & 0 \end{array}\right),$$

   où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \times \rho$.
   Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.
2. A l'aide de la question 6 de la partie 3, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{ccc|c} t_1 & * & \ldots & \\ * & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & t_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ * & \ldots & \ldots & \end{array}\right),$$

   où les t_i, $i = 1, \ldots, \rho$ sont des entiers non nuls.
3. En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.
   On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.
4. Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.