MPSI : DS 8, le 5/05/2021

Ce devoir est constitué d'un exercice et de deux problèmes. La difficulté est croissante et le devoir trop long. Les élèves ayant obtenu 15 ou plus au précédent DS sont autorisés, et même encouragés, à commencer par les problèmes. Les autres sont tenus de commencer par l'exercice 1. La résolution complète de l'exercice 1 assure la moyenne au devoir.

Exercice 1 : questions proches du cours

Les deux questions qui composent cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Soit $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}' + \mathrm{P}(1) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer une base du noyau de f. En déduire $\mathrm{rg}(f)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. *(Conseil : utiliser les dimensions !)*
2. On considère les matrices

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible et l'expression de l'inverse de P, noté P^{-1}.
   (b) On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Montrer que D est une matrice diagonale que l'on calculera et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n.
   (c) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

   (e) On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -a_n + c_n \\ c_{n+1} &= -a_n - b_n + 2c_n \end{cases}.$$

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$ puis que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$.
   (f) En déduire l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Problème 2

On note $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On note $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle, et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ .0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

On rappelle que $(\mathfrak{M}_2, +, .)$ est un espace vectoriel et que $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$ est un anneau.

Partie 1

A est une matrice fixée de $\mathfrak{M}_2$, différente de I et θ, on considère f de $\mathfrak{M}_2$ vers lui-même définie par

$$f : \mathrm{M} \mapsto f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \times \mathrm{A} - \mathrm{A} \times \mathrm{M}$$

1. Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}_2$? (on ne demande pas de justifier la réponse).
2. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2$.
3. Soit $\mathrm{K} = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_2 \quad / \quad \mathrm{A} \times \mathrm{M} = \mathrm{M} \times \mathrm{A}\}$.

   Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2, +, \times)$.
4. Montrer que I et A appartiennent à Ker f.
5. Montrer que Ker f est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire $\mathrm{A} \in \mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{Ker}\ f \Rightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{B} \in \mathrm{Ker}\ f$ (la démonstration sera détaillée).
6. Montrer que $(\mathrm{Ker}\ f, +, \times)$ est un anneau.

Partie 2

On pose maintenant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2$.

1. Calculer $f(\mathrm{M})$.
2.
   (a) Montrer que Ker f est le sous-espace vectoriel engendré par I et A.

   (b) Trouver une base de Ker f et préciser la dimension de Ker f ainsi que le rang de f.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
4. Soit $\mathrm{N} = x.\mathrm{I} + y.\mathrm{A}$ un élément de Ker f; déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
5. Résoudre dans Ker f l'équation : $\mathrm{N}^2 = \mathrm{I}$.

Problème 3

Le but du problème est de démontrer la formule de Stirling, dont nous n'avions pas totalement fini la démonstration dans le cours (mais on redémontre quand même tout dans le problème, y compris des choses déjà vues en cours). On ne pourra donc pas utiliser la formule de Stirling dans le problème.

Partie 1 : intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x.$$

   (On pourra utiliser un changement de variable affine.)
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement** décroissante. (On pourra comparer les fonctions $\cos^n$ et $\cos^{n+1}$.)

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\mathrm{W}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$$
5. Grâce à cette dernière question, calculer $\mathrm{W}_2, \mathrm{W}_3, \mathrm{W}_4$ et W_5.
6. Montrer grâce à l'avant-dernière question que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a
$$\mathrm{W}_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$
7. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$
(On pourra utiliser la question précédente en distinguant selon la parité de l'entier n.)
8. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} < 1$$
et en déduire que
$$\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$$
9. Montrer finalement que
$$\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{W}_n$.

Partie 2 : formule de Stirling On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \geqslant 1$, par
$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
et la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie, pour $n \geqslant 2$, par
$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$
8. Exprimer simplement v_n en fonction de n, et donner un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$.
9. En déduire que $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$ quand $n \to +\infty$.
10. Montrer que $12n^2v_n \geqslant -\dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang N. En déduire que la suite de terme général $\mathrm{V}_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$ est décroissante à partir de ce même rang N.
11. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\mathrm{N}-1} - \frac{1}{n-1}\right)$. En déduire que la suite (V_n) est minorée.
12. En déduire que la suite (V_n) est convergente*. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et donc qu'il existe un réel $\mathrm{K} > 0$ tel que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$
13. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(\mathrm{W}_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. En déduire que $\mathrm{K} = \sqrt{2\pi}$, puis que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$