DM 9, pour le 26 avril

Problème 1

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale
   $$\mathrm{I}(x) = \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t$$
   existe. On appellera I la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\mathrm{I}(x)$.
   (b) Calculer $\mathrm{I}(0)$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
   $$\mathrm{I}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$
   (d) Étudier la parité de I lorsque f est paire ou impaire.
   (e) En utilisant la formule obtenue en question 1.c, montrer que I est continue en 0.
   (f) Montrer que I est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais f dérivable en 0.
   (a) En utilisant une formule de Taylor pour f, montrer que I est dérivable en 0 et calculer $\mathrm{I}'(0)$.
   (b) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{I}'(x) = \int_0^1 t f'(tx)\,\mathrm{d}t$$
   On pourra utiliser une intégration par parties.
3. On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert de la forme $]-\alpha\,;\alpha[$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et donner ce développement limité. On pourra là encore utiliser une formule de Taylor.
   (b) On suppose que f est définie par :
   $$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f(u) = u\,\mathrm{ch}\,(u)$$
   Écrire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de I. Retrouver le résultat en calculant explicitement l'intégrale $\mathrm{I}(x)$.
4. On se propose de trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}^+$ qui vérifient la relation
   $$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = x f(x)$$
   (a) Soit f une telle fonction. Calculer $f(0)$ et montrer que f est solution de l'équation différentielle
   $$(1-2x)y(x) = x^2 y'(x)$$
   (b) Déterminer toutes les solutions de cette dernière équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+$ qui vérifient la relation (1).

Problème 2

1. On considère l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, qui à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme $\Delta(P)$ défini par

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

   (a) Montrer que Δ est linéaire.

   (b) Quel est le noyau de Δ ?

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image par Δ de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser le théorème du rang sur l'application Δ restreinte à $\mathbb{R}_n[X]$.

   (d) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que

$$\Delta(P) = R \text{ et } P(0) = 0$$

   Que dire du degré de P par rapport à celui de R ?

2. On définit une suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : on pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit H_{n+1} en fonction de H_n par les conditions

$$\Delta(H_{n+1} = H_n \text{ et } H_{n+1}(0) = 0$$

   (a) Expliquer pourquoi ce procédé définit bien une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Quel est le degré de H_n ? Quel est son coefficient dominant ?

   (c) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. On pourra commencer par montrer que $(H_0, \cdots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$.

   (d) Comme d'habitude, on définit $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, \Delta^{n+1} = \Delta^n \circ \Delta$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré p. Montrer que la décomposition de Q dans la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit

$$Q = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n(Q))(0) H_n$$

   (e) n et p étant des entiers naturels tels que $1 + p \leqslant n$, montrer que $H_n(p) = 0$. En déduire l'expression de H_n sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\Delta(P) = Q \text{ et } P(0) = 0$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n+1) = \sum_{m=0}^{n} Q(m)$$

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $(\Delta^n(P))(X)$ en fonction de $P(X), P(X+1), \cdots, P(X+n)$.

   (c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

      i. $\forall r \in \mathbb{Z}, P(r) \in \mathbb{Z}$

      ii. Les coordonnées de P dans la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des entiers relatifs.