Colle 1 — Intégration

Sujet 1

Exercice 1 *CC INP 56*

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 2

Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t\mapsto\frac{t-\sin t}{t^a}$ en fonction de $a\in\mathbb{R}$?

Sujet 2

Exercice 3 *CC INP 84*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n=(z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 4

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Sujet 3

Exercice 5 *CC INP 43*

Soit $x_0\in\mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0=x_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=h(\mathrm{Arctan}\,x)$.

Exercice 6

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Sujet 4

Exercice 7 *CC INP 46*

On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\dfrac{\pi}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 8

Nature de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha>0$.

Sujet 5

Exercice 9 *CC INP 3*

1. On pose $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 10

1. Montrer que $\sum\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*, u_n=\ln(n)+a\ln(n+2)+b\ln(n+3)$. Convergence de $\sum u_n$ en fonction de a et b ?
3. Calculer sa somme le cas échéant.

Sujet 6

Exercice 11 *CC INP 6*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 12

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge.
2. On note S sa somme. Montrer que $\frac{2}{3} \leq S \leq 1$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 (-t^2)^n \mathrm{d}t = u_n$.
4. En déduire ce que vaut pour $N \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{n=0}^{N} u_n$ et en déduire la valeur de S.
5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$ par intégration par parties ou par le changement de variable $t = \tan(\theta)$.
6. On note, pour $n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Existence et calcul de $T = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Sujet 7

Exercice 13 *CC INP 71*

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 14

1. Soit $\alpha > 1$. Équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$?
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
3. Montrer que si tel est le cas :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Sujet 8

Exercice 15 *CC INP 64*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 16

On fixe $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_{n+1} = \sin(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle.
3. En déduire un équivalent simple de u_n^α.

Sujet 9

Exercice 17 *CC INP 60*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Exercice 18

1. Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$, de
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$
2. Montrer que
$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$
3. Équivalent de R_n ? Nature de la série de terme général R_n ?

Sujet 10

Exercice 19 *CC INP 104*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 20

Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose

$$T(f) : x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t) \mathrm{d}t$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que si la fonction f est vecteur propre de T associé à une valeur propre non nulle, elle est dérivable.
3. Trouver $\ker T$ et les éléments propres de T.

Sujet 11

Exercice 21 *CC INP 112*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 22

Soit $n \geq 2$ et, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P)(X) = (X^2 - X)P(-1) + (X^2 + X)P(1)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.
2. Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de φ et donner les sous-espaces propres associés.
3. Ces sous-espaces propres sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Sujet 12

Exercice 23 *CC INP 83*

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 24

On pose $E = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) : x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$$

Montrer que T est un endomorphisme de E dont on déterminera les éventuelles valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.

Sujet 13

Exercice 25 *CC INP 59*

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 26

On note M^T la transposée de M. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des colonnes non nulles. On pose $A = XY^T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Donner la taille de A et préciser ses éléments. Montrer que la matrice est de rang 1 et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker} A$.
   (b) Écrire matriciellement $\mathrm{Tr} A$.
2. Réciproquement montrer que toute matrice de rang1 peut s'écrire sous la forme XY^T.
3. Donner $\mathrm{Sp} A$.
4. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr} A \neq 0$.

Sujet 14

Exercice 27 *CC INP 67*

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 28

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au moins égale à 2 et $\ell \in E^* \setminus \{0\}$. Soit $a \in E \setminus \{0\}$.

1. Déterminer $\dim \ker \ell$.
2. Soit $\ell' \in E^*$ tel que $\ker \ell \subset \ker \ell'$, montrer que ℓ et ℓ' sont proportionnelles.
3. Soit f définie par $f(x) = \ell(a)x - \ell(x)a$. Montrer que f est un endomorphisme de E.
4. On suppose que $\ell(a) \neq 0$.
   (a) Déterminer $\ker f$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Sujet 15

Exercice 29 *CC INP 70*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 30

Soit $n \geqslant 1$. On considère deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A admet au moins un vecteur propre. On note α la valeur propre associée.
2. On suppose que $AB = BA$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_n)$ est stable par B.
   (b) En déduire que A et B ont un vecteur propre commun.
3. On suppose que $AB - BA = \beta A$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$.
   On note Φ l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\Phi(M) = MB - BM$ pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi(A^k) = k\beta A^k$.
   (b) En déduire que A est nilpotent et que $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
   (c) En déduire que A et B ont un vecteur propre commun.

Sujet 16

Exercice 31 *CC INP 73*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

Exercice 32

1. Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}$, une base de l'image et une base du noyau de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

2. On suppose $a \neq -1$. Déterminer $\mathrm{tr}\,(M),\ \det(M),\ \mathrm{rg}\,(M),\ \mathrm{Sp}\,(M)$.
3. La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$?

Sujet 17

Exercice 33 *CC INP 65*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que :
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)\ .$$
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice 34

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $(a_1, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, A = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Sujet 18

Exercice 35 *CC INP 91*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 36

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

1. Calculer A^2.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

Sujet 19

Exercice 37 *CC INP 55*

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 38

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

1. Montrer que pour tous $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I^n, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
2. En déduire que, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in I^n$, on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n}$$
3. En déduire que si $x_1, \cdots, x_n$ sont n réels strictement positifs, on a :
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Sujet 20

Exercice 39 *CC INP 93*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \ker u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Exercice 40

1. Que dire d'une fonction convexe et concave sur un intervalle ?
2. Que dire de la somme de deux fonctions convexes ?
3. Que dire de la combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?

Sujet 21

Exercice 41 *CC INP 42*

On considère les deux équations suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

Exercice 42

Soit $(x, y, p, q) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.
3. En déduire que :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$
4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité précédente l'inégalité suivante :
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

Sujet 22

Exercice 43 *CC INP 34*

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 44

Soit $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose

$$p_\infty(f) = \sup\big\{|f(t)|\ ;\ t \in [0,1]\big\}, p_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, p_2(t) = \sqrt{(f|f)}$$

avec, pour tout $(f,g) \in E^2$:

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On admet qu'il s'agit de trois normes sur E.

1. Montrer qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\quad \forall f \in E \quad p_2(f) \leqslant \alpha p_\infty(f)$ et $p_1(f) \leqslant \beta p_2(f)$.
2. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?
3. Soit $F = \big\{f \in E \,|\, \forall x \in [0,1] \quad f(x) \geqslant 0\big\}$; F est-il fermé pour p_∞ ? pour p_1 ? pour p_2 ?

Sujet 23

Exercice 45 *CC INP 107*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 46

On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que
$$N_\infty(u) = \sup(|u_n|, n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad N(u) = \sup(|u_{n+1} - u_n|, n \in \mathbb{N})$$
définissent des normes sur E.
2. Montrer que :
$$\forall u \in E, N(u) \leq 2N_\infty(u)$$
Déterminer une suite non nulle qui réalise l'égalité dans l'inégalité précédente.
3. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Sujet 24

Exercice 47 *CC INP 37*

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 48

Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. E est-il un espace vectoriel ?
   Pour $f \in E$, on pose $K(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+, f \text{ est } k-\text{lipschitzienne}\}$.
2. $K(f)$ est-elle bien définie ? f est-elle $K(f)$ lipschitzienne ? K est-elle une norme sur E ?
3. Montrer que $N : f \mapsto K(f) + |f(0)|$ est une norme sur E.
4. Montrer que $N_\infty \leq N$.
5. N et N_∞ sont-elles équivalentes ?

Exercice 49 *Sous-groupes de $\mathbb{R}$*

On considère un sous-groupe H de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer l'existence de $\alpha = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$.
2. On suppose que $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in H$, puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Énoncer le résultat obtenu sur la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

Exercice 50 *Applications*

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm | n, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$$
2. En déduire que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. On pourra utiliser la parité et la périodicité du cosinus.
On a donc précisé le résultat obtenu par application de Bolzano-Weierstrass sur la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ *!*

Sujet 25

Exercice 51 *CC INP 39*

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 52

On veut démontrer que, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P? l'est aussi.

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Si a est racine de P d'ordre k, que dire de a pour P' ?
3. Démontrer le résultat.

Sujet 26

Exercice 53 *CC INP 44*

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 54

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \frac{v_n+u_n}{2}$.
3. En déduire que la suite (v_n) converge vers ℓ.

Sujet 27

Exercice 55 *CC INP 36*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 56

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions sur $[-1,1]$ définie par : $\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Calculer $f_0,\ f_1$ et f_2.
2. Trouver une relation liant $f_{n+1} + f_{n-1}$ et f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que $T_n(x) = f_n(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.
4. Déterminer les points de $[-1,1]$ en lesquels T_n vaut ± 1.
5. Montrer que les racines de T_n sont toutes dans $]-1,1[$.

Sujet 28

Exercice 57 *CC INP 41*

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Exercice 58

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|$ pour toute $f \in E$.
3. Les normes $\| \quad \|$ et $\| \quad \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Sujet 29

Exercice 59 *CC INP 9*

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 60

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.
3. Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.
4. Montrer que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

Sujet 30

Exercice 61 *CC INP 61*

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|a_{i,j}\right|$.

1. Prouver que $\|\;\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

   Est-elle convergente ?

Exercice 62

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

Sujet 31

Exercice 63 *CC INP 10*

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

Exercice 64

Dans les deux premières questions, on fixe $x \in [0,1]$.

1. Dresser le tableau de variations de $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t + \frac{x-t^2}{2}$.
2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g_x(u_n)$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
   (b) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, déterminer sa limite.
3. On considère la suite de fonctions $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $P_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est une fonction polynomiale.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est à valeurs dans $[0,1]$.
   (b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x))$$
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est croissante sur $[0,1]$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0) \quad \text{et} \quad P_n(0) \leq P_n(x) + \sqrt{x}$$
7. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction que l'on déterminera.

Sujet 32

Exercice 65 *CC INP 27*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 66

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx})$$
converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\mathrm{d}x$$

Sujet 33

Exercice 67 *CC INP 13*

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$
Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 68

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0,1/n], \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

1. Étudier la limite simple de (f_n).
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$$
Y a-t-il convergence uniforme de (f_n) ?
3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Sujet 34

Exercice 69 *CC INP 8*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \forall\, x\in\mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 70

Soit E l'ensemble des $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x}$, $f(1)=0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $u_n\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$. Monter que $u\colon x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto -\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $u\in E$.
2. Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta = f-g$. Montrer que δ est 1–périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?
3. En déduire que $f=g$. Que vaut E ?

Sujet 35

Exercice 71 *CC INP 16*

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \ u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 72

On considère $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple. On note S la somme de la série.
2. Convergence normale sur $\mathbb{R}_+$? Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. S est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$? Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
4. Soit $a > 0$. Résoudre : $(E) : y' - y = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $[a, +\infty[$.
5. Montrer que S est solution de (E). En déduire une expression de S.

Sujet 36

Exercice 73 *CC INP 14*

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 74

On définit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ pour un $x \in]0, +\infty[$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Donner le sens de variation de S.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}$.
5. Déterminer un équivalent de S en 0.
6. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Sujet 37

Exercice 75 *CC INP 20*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

   (c) $\sum \cos n z^n$.

Exercice 76

Soient $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ et $g : t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{\ln n}$. Déterminer les domaines de définition de f et de g. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sujet 38

Exercice 77 *CC INP 53*

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 78

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

Sujet 39

Exercice 79 *CC INP 18*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice 80

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ est convergente.
2. Soit $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.
3. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Sujet 40

Exercice 81 *CC INP 2*

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 82

On pose $f\colon x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}\,x-1} - \frac{2}{x^2}$ et $g\colon x \mapsto \frac{\mathrm{ch}\,x-1}{x^2}$. Montrer que l'on définit ainsi deux fonctions sur $\mathbb{R}^*$ prolongeables en applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Sujet 41

Exercice 83 *CC INP 23*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

Exercice 84

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)\mathrm{d}t$.

1. Étudier la parité de f. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) + 2xf(x) = 1$.
2. Donner un équivalent simple de f en zéro.
3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.
4. Déterminer la limite de $2x\exp(-x^2)\int_0^{x-1}\exp(t^2)\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Sujet 42

Exercice 85 *CC INP 24*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 86

1. Déterminer l'ensemble de définition de

   $$f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. Montrer que f est développable en série entière, et en donner le rayon de convergence.

Sujet 43

Exercice 87 *CC INP 19*

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que la fonction $f : t \longmapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 e^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}.$$

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 88

On définit la fonction g par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer une équation différentielle vérifiée par g.
3. En déduire une nouvelle expression intégrale de g, puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Sujet 44

Exercice 89 *CC INP 25*

1. Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 90

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une équation différentielle vérifiée par f, calculer sa valeur.

Sujet 45

Exercice 91 *CC INP 29*

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[, f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 92

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continue.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.
4. Calculer F' puis F.

Sujet 46

Exercice 93 *CC INP 101*

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 94

Soit (Ω, T, P) in espace probabilisé.

1. Montrer que pour $x \in [0;1]$, l'inégalité $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ est vérifiée.
2. Soient A, B deux éléments de T, incompatibles. Montrer que $P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$.
3. Soient A, B deux éléments de T.
   (a) Montrer que $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)P(A)$.
   (b) Montrer que $\mid P(A \cap B) - P(A)P(B) \mid \leq \frac{1}{4}$.

Sujet 47

Exercice 95 *CC INP 50*

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 96

Une puce se déplace sur un triangle équilatéral ABC. Elle se situe initialement en A.
Si elle est en A à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n+1$ de manière équiprobable.
Si elle est en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n+1$ de manière équiprobable.
Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.
On note A_n(resp B_n,C_n)="La puce est en A (resp B, C) à l'instant n"
On note u_n(resp v_n, w_n)$= P(A_n)$(resp $P(B_n)$, $P(C_n)$)

1. (a) Déterminer u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} en fonction de u_n, v_n, w_n.
   (b) Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $X_n = M^n X_0$
2. (a) Donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n.
   (b) Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$? Expliquer.

Sujet 48

Exercice 97 *CC INP 109*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 98

On considère deux variables aléatoires X et Y sur un même espace probabilisé, on suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$, où λ est une constante réelle.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. À l'aide de la variable $X - 1$, déterminer l'espérance et la variance de X.
5. Soit $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{i,j} = \mathbf{P}_{(X=j)}(Y = i)$.
   (a) Calculer B^2.
   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension des sous-espaces propres de B.

Exercice 99 *Exercice supplémentaire (Mines Ponts PC)*

Une puce se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$ en partant de 0. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité qu'elle fasse un saut à droite, $q = 1 - p$ la probabilité qu'elle fasse un saut à gauche. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse au bout de n déplacements. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Sujet 49

Exercice 100 *CC INP 97*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, P((X,Y)=(j,k)) = \dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 101

Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(X_1 = k) = pq^{k-1}$ avec $q = 1-p$.

1. Déterminez la loi des variables aléatoires suivantes :
   (a) $Y = \min(X_1, X_2)$
   (b) $S = X_1 + X_2$.
2. En reconnaissant la loi de Y, donnez son espérance et sa variance.
3. Calculez $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

Sujet 50

Exercice 102 *CC INP 106*

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 103

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

1. Justifier que X_n est bien une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.
3. On note Y_n le rang du premier tirage à l'issue duquel toutes les boules ont été tirées au moins une fois. Donner la loi de Y_2 puis celle de Y_3.

Sujet 51

Exercice 104 *CC INP 111*

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Exercice 105

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$ et $Y = |X_1 - X_2|$.

1. Calculer $P(Y=0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q}$. En déduire la loi de Y.
2. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Sujet 52

Exercice 106 *CC INP 108*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 107

1. On considère la série entière $\sum \frac{n}{2^n} t^n$.
   (a) Calculer son rayon de convergence.
   (b) Rappeler la somme des séries $\sum_{n\geqslant 0} t^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n t^{n-1}$
   (c) Pour t convenable, calculer la somme $S(t)$ de la série proposée.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de fonction génératrice $G_X = \lambda S$ où $\lambda > 0$
   (a) Rappeler la définition d'une fonction génératrice, calculer λ et exprimer $\mathbb{P}(X=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Rappeler les expressions liant $E(X)$, $V(X)$ et G_X et ses dérivées. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Sujet 53

Exercice 108 *CC INP 100*

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 109

Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(X_1=k) = pq^{k-1}$ avec $q = 1-p$.

1. Déterminez la loi des variables aléatoires suivantes :
   (a) $Y = \min(X_1, X_2)$
   (b) $S = X_1 + X_2$.
2. En reconnaissant la loi de Y, donnez son espérance et sa variance.
3. Calculez $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

Sujet 54

Exercice 110 *CC INP 100*

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 111

Soit $a > 0$. Une variable aléatoire X a pour loi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \frac{a}{n(n+1)}$. Déterminer a. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ? Expliciter la fonction génératrice de X.

Sujet 55

Exercice 112 *CC INP 81*

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}({}^tAA')$, où $\operatorname{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.

On note $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Exercice 113

Soit E un espace euclidien.

1. On considère F un sous-espace vectoriel et p le projecteur orthogonal sur F.
   (a) Montrer $F = \{x \in E : ||p(x)|| = ||x||\}$
   (b) Montrer $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$
   (c) Montrer $\forall (x,y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|p(y))$. Que cela signifie-t-il à propos de p ?
2. On considère maintenant F,G et H des sous-espaces vectoriels de E tel que $p_F \circ p_G$ soit le projecteur orthogonal sur H.
   (a) Montrer $F \cap G = H$
   (b) Montrer $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$

Sujet 56

Exercice 114 *CC INP 77*

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 115

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \int_0^1 t^2 f(t) g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire de E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la fonction constante 1 et la fonction identité $t \mapsto t$. Donner une base orthonormée de F.
3. Calculer la valeur minimale de $\int_0^1 t^2(\ln(t) - a - bt)^2\,\mathrm{d}t$ quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

Sujet 57

Exercice 116 *CC INP 80*

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 117

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.
2. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$. Déterminer l'orthogonal de F .
4. Calculer la distance de X^n à F .

Sujet 58

Exercice 118 *CC INP 68*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 119

Soit E un espace euclidien. On dit que f un endomorphisme de E est antisymétrique si $\forall x, y \in E \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

1. Que dire de f^2 ? Montrer que $\langle f^2(x), x\rangle \leqslant 0$ et que $\langle f(x), x\rangle = 0$
2. Que dire de A, matrice de f dans une base orthonormée ?
3. Calculer $\det({}^tA)$ de deux manières différentes. En déduire que si f est inversible, alors la dimension de E est paire.
4. Montrer que les valeurs propres de f^2 sont réelles et négatives.

Sujet 59

Exercice 120 *CC INP 78*

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathscr{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 121

Soit u un endomorphisme de E, espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour lequel u est antisymétrique, c'est-à-dire vérifie $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ pour $x, y \in E$.

1. Montrer que u admet au plus une valeur propre réelle que l'on déterminera.
2. u est-t-il diagonalisable ?
3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique.
4. Soit μ une valeur propre complexe de u. Montrer que μ est imaginaire pur.

Sujet 60

Exercice 122 *CC INP 85*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\Big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\Big)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 123

Soit E un espace euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $u \in L(E)$ un endomorphisme symétrique.

1. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in E, \alpha \|x\|^2 \leq \langle u(x)|x \rangle \leq \beta \|x\|^2$. On pourra utiliser les valeurs propres de u.
2. Montrer que si $x \in E$ non nul vérifie $\alpha \|x\|^2 = \langle u(x) \mid x \rangle$ ou $\beta \|x\|^2 = \langle u(x) \mid x \rangle$, alors x est vecteur propre de u.
3. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $\langle u(e_i)|e_i \rangle = \lambda_i$, alors $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

Sujet 61

Exercice 124 *CC INP 87*

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 125

Soit $f\colon x \mapsto x(\ln(1+2x) - \ln x)$. Déterminer le comportement de f en $+\infty$. Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe en $+\infty$ ainsi que les positions de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Sujet 62

Exercice 126 *CC INP 89*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 127

Soient $f\colon [a,b] \to [a,b]$ 1–lipschitzienne et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point fixe de f.

Sujet 63

Exercice 128 *CC INP 92*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice 129

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.