MPSI : DS 7, le 17/03/2021

Ce devoir est constitué de quatre exercices, de difficulté croissante.
Un barème indicatif est détaillé pour chaque exercice.
Soignez la rédaction, notamment pour les questions élémentaires, qui forment l'essentiel du sujet. L'exercice 4 n'est à aborder qu'après qu'on s'est assuré d'avoir au moins 20 points sur le reste.

Exercice 1 : questions proches du cours *(environ 7 points)*

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. On pose

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \{a\mathrm{X}^3 + b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et déterminer une base de ces deux sous-espaces vectoriels (on attend une justification précise !).
   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   (c) Soit π la projection sur F parallèlement à G. Étant donné $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d \in \mathrm{E}$, calculer $\pi(\mathrm{P})$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, g((x, y, z, t)) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Déterminer une base de $\ker(g)$.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(g)$.
   (d) g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2 : des symétries *(entre 7 et 10 points)*

Posons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
Si s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G, préciser s signifie donner les espaces F et G associés.
Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, déterminer u signifie calculer $u(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}$.

Partie 1 :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = -e_1$.
1. Déterminer u.
2. Soit s_1 la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(e_2)$. Justifier que cette définition a un sens et déterminer s_1.
3. Déterminer $u \circ s_1$.
4. En déduire qu'il existe une symétrie s_2 que l'on précisera telle que $u = s_2 \circ s_1$.

Partie 2 :

Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $v(e_1) = 2e_1 + e_2$ et $v(e_2) = -5e_1 - 2e_2$.
1. Déterminer v.
2. Montrer qu'il existe (f_1, f_2) base de E telle que $v(f_1) = f_2$ et $v(f_2) = -f_1$.
   On pourra calculer explicitement des valeurs de f_1 et f_2 qui conviennent.
3. Montrer qu'il existe $\varphi_0 \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, telle que $v = \varphi_0^{-1} \circ u \circ \varphi_0$.
   On pourra déterminer $\varphi_0(f_1)$ et $\varphi_0(f_2)$ en fonction de e_1 et e_2.
4. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

(a) Montrer que :

$$\varphi^{-1}(\mathrm{F}) \oplus \varphi^{-1}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}.$$

(b) Montrer que $\varphi^{-1} \circ s \circ \varphi$ est la symétrie par rapport à $\varphi^{-1}(\mathrm{F})$ parallèlement à $\varphi^{-1}(\mathrm{G})$.

5. En déduire que v est la composée de deux symétries que l'on ne demande pas de préciser.

Exercice 3 : approximation de π *(entre 7 et 10 points))*

1. On note, pour tout $x \in \mathrm{I} = \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin(x) + \tan(x)\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$$

(a) Factoriser le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

(b) On pose, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) = f(x) - x$.
Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u'(x) = \frac{\mathrm{P}(\cos x)}{3\cos(x)^2}$.

(c) En déduire les variations de u sur I.

(d) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose $v(x) = x - g(x)$.
Justifier qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré deux tel que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $v'(x) = \frac{\mathrm{Q}(\cos x)}{(2+\cos x)^2}$.

(e) En déduire les variations de v sur I.

(f) Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad g(x) < x < f(x)$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(b) Déduire de la question 1.f un encadrement de π.

3. On pose, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

(a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin(\theta)^2$$

et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent tous deux vers π lorsque $n \to +\infty$.

(d) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie, à l'aide des relations obtenues en questions 3.a et 3.b, une approximation x de π à e près, ainsi que le nombre k d'itérations nécessaires.

```
from math import sqrt

def f(e):
    k = 0
    a = sqrt(3)/2
    b = 1/2
    while ...................:
        a =
        b =
        k =
    x =
    return (x,k)
```

(e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Python qui prend comme entrée un entier p et qui renvoie une liste Python de taille p, dont la i-ème composante contient le nombre d'itérations nécessaires pour la précision $10^{-(i+1)}$.

Exercice 4 : images et noyaux itérés *(quelques points bonus)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est **stable** par E lorsque $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$, c'est-à-dire lorsque pour tout $v \in \mathrm{V}$, on a $f(v) \in \mathrm{V}$. Le cas échéant, on peut considérer la restriction f_{V} de f à V ; il s'agit (on l'admet) d'un endomorphisme de V.

On notera, comme dans le cours, $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_n = \mathrm{Im}(f^n)$ et $\mathrm{G}_n = \mathrm{Ker}(f^n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que les suites de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion.

On pose désormais :

$$\mathrm{F} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n \quad \mathrm{et} \mathrm{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{G}_n$$

3. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
4. Montrer que F et G sont stables par f.
5. On suppose que f est un automorphisme de E. Déterminer F et G.

Dans les trois prochaines questions, on suppose que $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ est un entier tel que $\mathrm{F}_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{F}_{\mathrm{N}}$.

6. Montrer que : pour tout $p \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{\mathrm{N}+p} = \mathrm{F}_{\mathrm{N}}$.
7. Justifier l'existence d'un plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F}_{k+1} = \mathrm{F}_k$. On note désormais cet entier $r(f)$.
8. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}_{r(f)}$.

Dans les trois prochaines questions, on suppose que $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ est un entier tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{G}_{\mathrm{N}}$.

9. Montrer que : pour tout $p \in \mathbb{N}, \mathrm{G}_{\mathrm{N}+p} = \mathrm{G}_{\mathrm{N}}$.
10. Justifier l'existence d'un plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{G}_{k+1} = \mathrm{G}_k$. On note désormais cet entier $s(f)$.
11. Montrer que $\mathrm{F}_{s(f)} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
12. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n+1}$ et $\mathrm{G}_{n+1} = \mathrm{G}_{n+2}$. Montrer que $\mathrm{G}_n = \mathrm{G}_{n+1}$.
13. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathrm{G}_n = \mathrm{G}_{n+1}$ et $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_{n+2}$. Montrer que $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n+1}$.

On dit que f est **de caractère fini** lorsqu'il existe un entier r et un entier s tels que $\mathrm{F}_r = \mathrm{F}_{r+1}$ et $\mathrm{G}_s = \mathrm{G}_{s+1}$. On suppose dans les quatre prochaines questions que f est de caractère fini. On peut donc considérer les entiers $r(f)$ et $s(f)$ définis aux questions 7 et 10.

14. Montrer que $r(f) = s(f)$.
15. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
16. Montrer que la restriction de u à F est un automorphisme.
17. Montrer que la restriction de u à G est **nilpotente**, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $(u_{\mathrm{G}})^p = 0$.
18. Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui n'est pas de caractère fini. *(Conseil : prendre un « gros » espace, qui n'admet pas de base finie, et un endomorphisme bien choisi !)*

(Normalement, vous n'avez pas eu beaucoup de temps pour aborder l'exercice 4, que je vous conseille donc de retravailler chez vous.)