

DM 8, pour le 25 mars

Problème 1

Dans tout ce problème, a désigne un réel.

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.

Le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou u .

La partie I étudie le cas où P est constant.

La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.

La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists b \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = au_n + b$.

Montrer l'unicité de b . On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2.

(a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

(b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de \mathbb{N} , $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $y_n = a^n$.

Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y .

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

(a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

(b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de \mathbb{N} ,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

(c) Que peut-on en conclure ?

6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.

On fixe un entier naturel p . On note $\mathbb{R}_p[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.

On pose $E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans \mathbb{R}^{p+1} définie par : $\varphi(P) = (P(0), P(1), \dots, P(p))$).

On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Déterminer $\text{Ker } \theta$ (noyau de θ).
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
 - (a) Quel est le degré de Q_k ?
 - (b) Montrer que la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_p) est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
6.
 - (a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \dots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ , notée $\text{Im } \theta$.
 - (b) Que peut-on en conclure ?
7. Dédurre des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.
8. Pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de \mathbb{N} , par : $y_n = a^n$.
Montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
9. *Application* : déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$

2. *Application* : déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$