Exercice 1 Deux espaces vectoriels

1. On considère $u=(1,2,1), v=(1,-1,0)\in\mathbb{R}^3$ et on pose $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -x-y+3z=0\right\}$.
   (a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $u,v\in V$ puis que $V=\mathrm{Vect}(u,v)$.
   (c) On pose, pour $a\in\mathbb{R}$, $w_a=(a,a+1,a+2)$. Montrer que w_a est combinaison linéaire de u et v si et seulement si $a=-5$.
   (d) La famille (u,v,w_a) est-elle libre ou liée ?
   (e) Montrer que que $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}(u,v,w_a)$ si et seulement si $a\neq -5$.
2. On pose E l'ensemble des fonction définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose
$$V=\left\{y\in E \mid y''=y\right\}.$$
   (a) Justifier que E est un espace vectoriel et que V est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{ch},\mathrm{sh}\in V$. En déduire une relation entre $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ et V.
   (c) Montrer que la famille $(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est libre dans E.
   (d) On considère $f : x\mapsto e^x$ et $g : x\mapsto e^{-x}$. En résolvant l'équation différentielle $y''-y=0$, montrer que
$$V=\mathrm{Vect}(f,g).$$
   (e) Montrer que (f,g) est une famille libre de E puis déterminer la dimension de V.
   (f) Conclure que $V=\mathrm{Vect}(\mathrm{ch},\mathrm{sh})$.

Exercice 2 Une application linéaire

Soit $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ telle que :
$$f(e_1)=(2,1,1),\ f(e_2)=(1,2,-1),\ f(e_3)=(1,-1,2).$$

1. Soit $(x,y,z)\in E$. Déterminer $f(x,y,z)$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :
$$f\circ f=\lambda f.$$
3. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.
4. Montrer que :
$$\ker f\oplus \mathrm{Im} f=E.$$
5. Soit p la projection sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\ker f$. Montrer que :
$$f=\lambda p.$$