MPSI : DS 6, le 24/02/2021

Ce devoir est constitué de 2 exercices et d'un problème. L'exercice 1 est constitué de questions proches du cours. La résolution correcte de tout cet exercice assurera minimum 5 points.

Il est conseillé aux élèves ayant eu de bons résultats au devoir précédent (14 ou plus) de s'intéresser prioritairement à l'exercice 2 et au problème 3.

N'oubliez pas de prêter une attention particulière à la rédaction (phrases en français, variables introduites, assertions mathématiques quantifiées...) et au soin (résultats encadrés, écriture sur les lignes et suffisamment grosse pour être lisible par le correcteur...).

Exercice 1 : questions proches du cours

1. Calculer les développements limités suivants :

   (a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0

   (b) $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

   (c) $\sqrt{2+\sin x}$ à l'ordre 2 en 0

   (d) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0

2. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de X^5-1 par X^2+3.
3. Déduire de la question précédente les primitives de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^5-1}{x^2+3}$$

   On précisera l'intervalle (le plus grand possible) sur lequel on travaille.
4. Décomposer les polynômes $\mathrm{P}=\mathrm{X}^4-4$ et $\mathrm{Q}=2\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2-3$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 : une famille de polynômes

On définit une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de la manière suivante :

$$\mathrm{T}_0=1, \quad \mathrm{T}_1=\mathrm{X} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2}=2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n$$

1. Calculer $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$.
2. Montrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le degré de T_n est n et le coefficient dominant de T_n est 2^n. On pourra effectuer une récurrence double sur n.
3. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{T}_n(-\mathrm{X})=(-1)^n\mathrm{T}_n(\mathrm{X})$.
4. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}$, la valeur de $\mathrm{T}_n(0)$.
5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\cos((n+2)x)=2\cos(x)\cos((n+1)x)-\cos(nx)$$

6. En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos(x))=\cos(nx)$$

7. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que T_n est même *l'unique* polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{P}(\cos(x))=\cos(nx)$$

8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On cherche à factoriser le polynôme T_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   (a) Résoudre l'équation $\cos(nx)=0$, d'inconnue $x\in[0,\pi]$.

   (b) En déduire les racines du polynôme T_n puis la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Problème 3 : problème d'analyse

Partie 1 : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}\,(\mathrm{X}) < \mathrm{X}$.
5. En déduire le tableau de variations de f.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\mathrm{X} \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
   où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.
8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \mathrm{ch}\,(x). \qquad \text{(E)}$$

8. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).
9. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
10. Justifier que la fonction F (définie dans la question 8) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : étude d'une suite

11. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$
    admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.
    On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.
12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
14. En utilisant la question 7, déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : questions supplémentaires

Ces questions supplémentaires sur l'exercice 2 ne sont à aborder que si vous avez très bien traité tout le reste, et notamment le début de l'exercice 2.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2k}{n} (-1)^k \sin^{2k}(x) \cos^{n-2k}(x)$$

10. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2k}{n} (\mathrm{X}^2 - 1)^k \mathrm{X}^{n-2k}$$

11. Retrouver à partir de cette dernière expression le degré et le coefficient dominant de T_n.
12. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], |\mathrm{T}_n(x)| \leqslant 1$.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [|0, n|]$, on pose $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Montrer que $\mathrm{T}_n(c_0) = 1$ et que, pour $k \in [|0, n-1|]$, on a $\mathrm{T}_n(c_{k+1}) = -\mathrm{T}_n(c_k)$.
14. Représenter graphiquement la fonction polynomiale asssociée à T_3 sur $[-1, 1]$. On fera figurer les réels c_k pour $k \in [|0, 3|]$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les polynômes T_n et T_{n+1} sont premiers entre eux.
16. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et g le pgcd de n et m. On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.
    (a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors en posant a le coefficient dominant de T_g, le pgcd de T_n et T_m est $\frac{1}{a}\mathrm{T}_g$.
    (b) Montrer que si m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.
    (c) Que peut-on dire du pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes ?