MPSI : DS 5, le 20/01/2021

Ce devoir est constitué de trois exercices et d'un problème. L'exercice 1 est constitué de questions de cours et proches du cours ; tout élève ayant eu moins de 6 au devoir précédent doit l'aborder **prioritairement**. La résolution correcte de tout cet exercice assurera minimum 5 points.

Il est *conseillé* aux élèves ayant eu plus de 14 au devoir précédent de s'intéresser aux exercices 2 et 3 et au problème 4. Le cas échéant, ils peuvent s'intéresser aux questions préliminaires de l'exercice 1 au moment où ils doivent s'en servir.

Exercice 1 : questions proches du cours

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Énoncer le théorème de Bézout sur les nombres premiers entre eux, puis montrer que si x, y, z sont trois entiers relatifs, si x est premier avec y et avec z, alors x est premier avec yz.
2. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^2+1)\sin(\ln(x))}{x^3+2}$.
3. Énoncer l'**in**égalité des accroissements finis.
4. Énoncer le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ en a pour une fonction définie sur $]\,a\,;b\,]$. (On attend toutes les hypothèses !)
5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Justifier que la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$, définie sur $]-1\,;+\infty\,[$, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis déterminer (en la prouvant... par exemple par récurrence) une formule pour sa dérivée n-ième.
7. Donner (en la justifiant) la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire un équivalent simple de $\ln(1+x)$ en 0.

Exercice 2 : exercice d'analyse

1. Dans cette question, on souhaite réaliser l'étude de la fonction f telle que
$$f(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \text{ sinon}$$
   (a) Obtenir l'ensemble de définition D de f.
   (b) f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,[$.
   (d) Dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.
2. Dans cette question, on souhaite étudier la suite v telle que $v_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant e$.
   (b) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.
   (c) Montrer que $\forall x \geqslant e, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - e| \leqslant \frac{1}{4^n}$. *(Indication : on pourra utiliser la question 3 de l'exercice 1 et une récurrence.)*
   (e) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.
3. Etude de la fonction g telle que
$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$$

(a) On admet que, sur $\mathrm{D}\backslash\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.
Etudier les variations de g.

(b) Déterminer la limite de g en 1. *(Indication : on pourra poser $x = 1 + h$ et utiliser la question 7 de l'exercice 1.)*

(c) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.

Exercice 3 : exercice d'arithmétique On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un nombre réel α.

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathrm{A}_{n,\alpha} = \{p \in \mathbb{N}^*, \exp(2i\pi n p \alpha) = 1\}$$

1. Montrer que $\mathrm{A}_{n,\alpha}$ n'est pas l'ensemble vide si et seulement si α est un nombre rationnel.
On veillera à montrer séparément les deux implications correspondant à cette équivalence.
On suppose à présent et dans tout le reste de l'exercice que α est un nombre rationnel non nul.
On note $p(\alpha)$ le plus petit élément de $\mathrm{A}_{n,\alpha}$. Le but est de calculer $p(\alpha)$.
2. Justifier l'égalité : $p(\alpha) = p(-\alpha)$.
On pose $|\alpha| = \frac{r}{s}$ avec $(r,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $r \wedge s = 1$. On note également $d = n \wedge s$. On définit les nombres entiers n' et s' par : $n = dn'$ et $s = ds'$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$p \in \mathrm{A}_{n,\alpha} \iff \exists t \in \mathbb{N}^*, pn'r = s't$$
4. Montrer enfin que
$$p(\alpha) = \frac{s}{n \wedge s}$$
(Indication : on pourra utiliser la question 1 du premier exercice, puis montrer que pour $p \in \mathrm{A}_{n,\alpha}$, s' divise p.)

Problème 4 : une équation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est, pour a, b deux réels, l'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(a,b)$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b)$$

1. *Étude du cas particulier* $|a| = 1$
   (a) On suppose que $a = 1$ et $b \neq 0$.
      i. À quelle condition sur le réel ω les fonctions $c : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $s : x \mapsto \sin(\omega x)$ appartiennent-elles à l'ensemble $\mathcal{E}(a,b)$?
      ii. Plus généralement, quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(a,b)$?

   (b) On suppose que $a = -1$.
      i. Préciser quelles sont les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(-1,0)$.
      ii. Établir l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
      $$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x+b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right).$$
      iii. En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(-1,b)$.
2. *Étude du cas* $|a| < 1$
On considère ici la suite de premier terme $x_0 = x$, où x est un réel quelconque donné, et définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = ax_n + b$ où le réel a vérifie $|a| < 1$.

(a) Montrer que si la suite (x_n) converge vers un nombre réel L, alors on a $\mathrm{L} = b/(1-a)$.

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer $x_{n+1} - \mathrm{L}$ en fonction de $x_n - \mathrm{L}$, puis en déduire :
— l'expression de x_n en fonction de a^n, x et L,
— la convergence et la limite de la suite (x_n).

(c) Vérifier, si $f \in \mathcal{E}(a,b)$, qu'on a $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire, si $f \in \mathcal{E}(a,b)$ avec $|a| < 1$, qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\mathrm{L})$.

(d) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(a,b)$ lorsque $|a| < 1$.

3. *Étude du cas* $|a| > 1$

(a) Établir (si $a \neq 0$) l'équivalence des deux relations suivantes pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(ax+b) \quad ; \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{a}\right).$$

(b) En déduire les fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(a,b)$ lorsque $|a| > 1$.