DM 6, pour le 28 janvier

Problème 1 : équation polynomiale

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout ce problème, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On étudie l'équation polynomiale suivante :

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

Dans les questions 1 à 4, on fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation (*).

1. Montrer que, si a est une racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.
2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
   (a) Vérifier que, lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n, le nombre complexe a_n est une racine de P.
   (b) Montrer que, lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.
   (c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
   (d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.
3. Déduire des questions précédentes que, si a est une racine complexe de P, alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.
4. Montrer que si le degré de P est strictement supérieur à 0 alors P a pour unique racine 0.
5. Déterminer alors tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Problème 2 : étude d'une suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par :

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1. Calculer les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.
2. Calculer $L_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le degré de L_n en fonction de n et donner son coefficient dominant sous la forme d'une somme.
4. On dit qu'un polynôme P est pair si $P(X) = P(-X)$; qu'il est impair si $P(-X) = -P(X)$. En utilisant un changement d'indice, montrer que L_n est pair pour n pair et impair pour n impair.
5. Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}.$$
6. En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
7. Montrer alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |L_n(x)| \leqslant \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n \binom{2n}{n}$$
8. On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$.
   (a) Vérifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)U_n'(X) = 2nXU_n(X).$$
   (b) En dérivant $n+1$ fois cette relation, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)L_n''(X) + 2XL_n'(X) = n(n+1)L_n(X).$$