DM 5, pour le 11 janvier

Problème 1 : analyse de la méthode de Newton

Le but de ce devoir est d'étudier le principe de la méthode de Newton, un algorithme qui cherche à déterminer une approximation d'un point d'annulation d'une fonction réelle.

Dans tout le problème, on considère deux réels a, b tels que $a < b$, une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ telle que $f(a) > 0, f(b) < 0$ et f' est strictement négative sur $[a, b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]a, b[$. On notera cette solution α.
2. Soit $x_0 \in [a, b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en $(x_0, f(x_0))$.
   On introduit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in [a, b], g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Calculer la dérivée de g sur $[a, b]$. Donner en particulier la valeur de $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
4. Montrer qu'il existe deux réels m et M strictement positifs tels que :
$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$
5. Montrer qu'il existe $\mathrm{L} > 0$ tel que : $\forall t \in [a, b], |f(t)| \leqslant \mathrm{L}|t - \alpha|$.
6. Soit $x \in [a, b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et α, montrer que $|g(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{m^2}\mathrm{L}|x - \alpha|^2$.
7. On pose $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{ML}}{m^2}$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $\mathrm{I} = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\mathrm{K}h < 1$ et $\mathrm{I} \subset [a, b]$.
8. Montrer que : $\forall x \in \mathrm{I}, g(x) \in \mathrm{I}$.
   On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathrm{I}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.
9. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
10. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\mathrm{K}} \left(\mathrm{K}(x_0 - \alpha)\right)^{2^n}$$
11. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
    Dans toute la fin du problème, on étudie un exemple d'une telle méthode de Newton pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$. On considère donc $f : [1, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3 - x^2$.
12. En reprenant les notations de la question 7, montrer qu'on peut prendre $\mathrm{K} = 3$ et $h = 0,3$. On notera que $1,7 < \sqrt{3} < 2$.
13. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie.
14. Sur un graphe, dessiner la fonction g et quelques termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour bien comprendre ce qu'on fait.
15. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \sqrt{3}| \leqslant \frac{1}{3}(0,9)^{2^n}$.
16. Combien d'itérations suffit-il de faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
17. Si l'on avait utilise une méthode de dichotomie, combien d'itérations aurait-on dû faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$?
18. Conclure : quel(s) intérêt(s) présente(nt) la méthode de Newton ? Voyez-vous des inconvénients ?