MPSI : DS 4, le 16/12/2020

Y a un langage à inventer
Anne Sylvestre, 1934–2020

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un problème ; l'exercice 4, non guidé et difficile, n'est à envisager que si vous avez très bien traité tout le reste.

Exercice 1 : questions proches du cours

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Les ensembles
$$\mathrm{A} = \{2k, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$$
sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Soit $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ deux sous-groupes de $(\mathrm{G}, \star)$. Montrer que $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \star)$. $\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2$ est-il nécessairement un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \star)$?
3. Montrer que l'ensemble
$$\mathrm{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$$
a une structure d'anneau lorsqu'on le munit de la somme et du produit des fonctions. Est-il intègre ?
4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$
Déterminer une expression du terme général de u.
5. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\sin(n^2)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 2 : séries alternées

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$
   (a) Montrer que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Leur limite commune est notée γ.
(On pourra écrire $\ln(n) - \ln(n+1)$ *comme l'intégrale d'une certaine fonction et tenter d'exploiter la positivité de l'intégrale.)*
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$
Déduire des questions 1 et 2 l'existence et la valeur de la limite de $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
(On pourra relier A_{2n} *à certaines valeurs de la suite* u *définie dans la question précédente.)*

Problème 3

À toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On va étudier le lien entre le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et celui de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle de limite nulle et soit $\varepsilon > 0$.
   i. Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$:
   $$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} u_k\right) + \varepsilon.$$
   ii. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   (b) En utilisant la question précédente, montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
2. On considère la suite définie par :
   $$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
   (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n+1}.$$
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}.$$
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
   (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n, x_{n+1} et x_1. En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1.$$
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.
   (a) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) On suppose que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel l.
   i. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   ii. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où $l \neq 0$.
   iii. Dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?
4. Dans cette question, on pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.$$
   (a) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Conclure quand à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question 1.(b).
5. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :
   $$n u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.
   (c) Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la limite.
   (d) Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 4

Étudier la convergence de la suite u de terme général

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k^n$$