DM 4, pour le 3 décembre

Problème 1 : étude d'une suite récurrente

Considérons la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in]1,+\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 1 + \frac{1}{x_n - 1} \end{cases}$$

1. **Etude de la fonction.**
   (a) Etudier la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Seul un tableau de variation avec les limites aux bornes est attendu.
   (b) Déterminer le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. **Etude de la suite (x_n).**
   (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie et est à valeurs dans $]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que la suite (x_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. **Recherche d'un équivalent.**
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $x_n \geqslant n + 1$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$0 \leqslant x_n - x_1 - (n-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
   (c) Montrer que pour $x \in]-1,+\infty[$, $ln(1+x) \leqslant x$.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
   (e) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n-1)$$
   (f) Montrer alors que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$n + 1 \leqslant x_n \leqslant x_1 + n + \ln(n-1)$$
   (g) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)$.

Problème 2 : une suite associée On associe, à toute suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

1. Deux exemples.
   (a) Dans cette question, on pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = \alpha,$$
   où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Expliciter la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Dans cette question, on pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = x^n,$$
   où $x \in \mathbb{R}$.
   Expliciter la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que, quand n tend vers l'infini et $k \in [\![0\,;n]\!]$ est fixé :
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{k!\binom{n}{k}}{n^k} = 1.$$
   (b) En déduire la limite, quand n tend vers l'infini, de :
   $$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$
3. (a) Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et soit q un entier naturel fixé.
   On considère, pour $n > q$, la somme :
   $$\mathrm{S}_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}.$$
   Quelle est la limite de $\mathrm{S}_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?
   (b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0.$$
   (c) Soit $l \in \mathbb{R}$, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$. Quelle est la limite de $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
   (d) La convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$?