Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Déterminer, en justifiant, la véracité des assertions suivantes :

1. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.
2. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si (u_n) est strictement décroissante et à termes positifs ou nuls, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et (u_n) est à termes positifs ou nuls alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
6. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.
7. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = +\infty$.
8. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) est convergente.
9. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 *Convergences*

Étudier la nature de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donner l'éventuelle limite, lorsque u_n est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

1. $u_n = 7^n - n^2 2^n$;
2. $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$;
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$;
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$;
5. $u_n = \ln n + \sin n$;
6. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
7. $u_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$;
8. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;
9. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)}$
10. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 *Convergence d'un quotient*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.

1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où $l < 1$.
2. Même question dans le cas où $l > 1$.
3. Montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas où $l = 1$.

Exercice 4 *Suites extraites*

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5 $\cos(n)$ *et* $\sin(n)$

On va montrer par l'absurde que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$, sont divergentes.

1. Justifier qu'on a $v_1 \neq 0$.
2. Pour $n \geq 0$, exprimer $u_{n+1} - u_{n-1}$ en fonction de v_n et $v_{n+1} - v_{n-1}$ en fonction de u_n.
3. Déduire des deux questions précédentes que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0.
4. En contemplant $u_n^2 + v_n^2$, conclure qu'aucune des deux suites ne peut converger.
5. Donner (sans démonstration détaillée, mais avec l'idée) une CNS sur α pour que la suite $(\sin(\alpha n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 6 *Suite récurrente*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

On considère $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ et que $f([\sqrt{2}, +\infty[) \subset [\sqrt{2}, +\infty[$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par $\sqrt{2}$.
2. En raisonnant par récurrence, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 7 *Irrationalité de e*

On considère deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}.$$

1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Ainsi, ces deux suites convergent vers une même limite. On admet que cette limite est le nombre e. On veut montrer que e est irrationnel. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$e = \frac{p}{q}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$.
3. Montrer que le nombre $q!\,(e - u_q)$ est un entier. Conclure.

Exercice 8 *Étude d'une suite définie implicitement*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\varphi_n(x) = x - \ln x - n.$$

1. En étudiant la fonction φ_n, montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,1[$ possède une unique solution lorsque $n \geq 2$.

On note ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, x_n l'unique solution de l'équation précédente.

2. En calculant $\varphi_{n+1}(x_n)$, montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
3. En remarquant que $(x_n)_{n\geq 2}$ est bornée, montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge et que sa limite est 0.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n x_n = 1$.

Exercice 9 *Suite récurrente*

On considère la fonction

$$g : x \mapsto \frac{-1+x}{3+x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de g et le tableau des variations de g. Que vaut $g(-1)$?
2. En déduire que la suite définie par $u_0 = 0$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien définie.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $u_n = -1$, alors $u_{n-1} = -1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.
4. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{u_n+1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et déterminer une expression simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 *Suites adjacentes*

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n+b_n} \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$

1. Que vaut $a_n b_n$?
2. Montrer que (a_n) et (b_n) vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
3. Montrer qu'on a $a_n - b_n 0$.
4. En déduire que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ont une limite commune **que l'on calculera**.

Exercice 11 *Suites récurrentes*

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+4}$
2. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+u_n}{2}$
3. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$
4. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$

Exercice 12 *Bornes supérieures et inférieures*

Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $\left\{\dfrac{1}{p-q}\right\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2, p\neq q}$
2. $\left\{\dfrac{q}{2^p+q}\right\}_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$
3. $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$
4. $\left\{\dfrac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q}\right\}_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Exercice 13 *Une suite définie implicitement (*)*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution, qu'on note x_n.
Étudier la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer, le cas échéant, sa limite.

Exercice 14 *Termes généraux*

Donner le terme général de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme suit :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, u_0 = 3, u_1 = 5$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, u_0 = 1, u_1 = 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, u_0 = 1, u_1 = 2$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1, u_0 = 2$

Exercice 15 *Une suite récurrente linéaire avec un second membre*

On étudie les suites qui vérifient l'équation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2$$

1. Déterminer une solution de l'équation du type $n \mapsto an^2 + bn + c$ avec a, b, c des constantes réelles à déterminer.
2. En déduire une expression explicite de l'unique solution de l'équation pour laquelle $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (on pourra s'intéresser à la différence d'une telle suite avec la suite précédemment trouvée).
