TD 6 — Logique, ensembles, applications, relations binaires

Exercice 1 *Équivalence*

La proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(x^2 = 9\right) \iff (x = 3)$$

est-elle vraie ?

Exercice 3 *Véracité*

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \quad \implies \quad x \geq 3$
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \quad x < y \quad \implies \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
3. $\exists M \in [0,2[, \quad \forall x \in [0,2[, \quad x \leq M$
4. $\exists M \in [0,2[, \quad \forall x \in [0,2[, \quad x \geq M$
5. $1+1=2 \implies 1+1=3$;
6. $1+1=3 \implies 1+1=2$;
7. $1=0 \implies \exists p,q,r \in \mathbb{Z} : p^3+q^3+r^3=42$;
8. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \implies x \geq 3$;
9. $\forall x,y \in \mathbb{R}^*, x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$;
10. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est pair ;
11. $\exists x \in \mathbb{R}_+ : x < \sqrt{x}$;
12. $\exists! z \in \mathbb{R} : \cos z = 0$;
13. $\exists x \in \mathbb{R} : (x \leq x^2$ et $x = e^{-x})$;
14. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n+m$ est impair ;
15. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : nm$ est impair ;
16. $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x \leq \eta \implies x^2 \leq 1$.
17. $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \eta \implies x^2 \leq 1$.
18. $\exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \eta \implies x^2 \leq 10^{-18}$;
19. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \eta \implies x^2 \leq \varepsilon$;
20. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \eta \implies x^n \leq \varepsilon$.

Exercice 4 *Traduction mathématiques → français*

Traduire en langage courant (et éclairant) les assertions mathématiques suivantes, puis déterminer (sans justifier) leurs valeurs de vérité.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \leq N$
2. $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq N$
3. $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = e^x$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad y = e^x$

Exercice 5 *Traduction français → mathématiques*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec des quantificateurs) :

1. f est croissante.
2. f s'annule.
3. f est la fonction nulle.
4. f n'est pas une fonction constante.
5. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
6. f s'annule au plus une fois.

Exercice 6 *Ensembles*

Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1. l'ensemble des entiers naturels divisibles par 3.
2. l'ensemble des entiers qui sont la somme de deux carrés d'entiers.
3. l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des entiers relatifs.

Exercice 7 *Intervalles de $\mathbb{R}$*

Soit $a < b < c < d$ quatre réels. Décrire les ensembles suivants.

1. $[a,c] \cup [b,d]$;
2. $[a,c] \cap [b,d]$;
3. $[a,b] \cap [c,d]$;
4. $[a,c] \setminus [b,d]$;
5. $[a,d] \setminus [b,c]$;
6. $[b,c] \setminus [a,d]$.

L'intersection de deux intervalles est-elle toujours un intervalle ? et l'union ?

Exercice 8 *Appartenance et inclusion*

Soit $E = \{a,b,c\}$ un ensemble. Quelles sont les assertions vraies ?

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$
6. $\{\emptyset\} \subset E$

Exercice 9 *Ensemble des parties*

Décrire en extension l'ensemble $\mathscr{P}\left(\mathscr{P}\left(\{1\}\right)\right)$.

Exercice 10 *(*)*

Soit A et B deux ensembles. Montrer que :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$

Exercice 11 *(**) Une équation ensembliste*

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 12 *Image directe, image réciproque*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f^{\rightarrow}(\mathbb{R})$
2. $f^{\rightarrow}([-3,2])$
3. $f^{\rightarrow}([-3,3])$
4. $f^{\rightarrow}(\{-5\} \cup [-1,1])$
5. $f^{\leftarrow}([-5,-3[)$
6. $f^{\leftarrow}([-4,4[)$
7. $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_-))$
8. $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(\mathbb{R}_-))$

Exercice 13 *Injectivité, surjectivité, bijectivité*

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x-2|$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$
3. $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3x+1}{4x+1}$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$
5. $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^3$
6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto 2y$
7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (1, x-y, y)$
8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (2x+y, 3x-2y)$

Exercice 14 *Bijections et réciproques*

1. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x^3+1}$ est bijective de $[-1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{\ln \frac{x+1}{x-1}}$ est bijective de $]1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
3. Soit $f : x \mapsto x^2+4x+1$. Déterminer deux intervalles (les plus grands possibles) I et J tels que f soit une bijection de I sur J. Y déterminer la réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f.

Exercice 15 *Des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g. Que vaut $g \circ f$? Qu'en retenir ?

Exercice 16 *Encore un peu d'images*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Déterminer l'image de f.
2. Montrer que f est injective sur $[-1,1]$ et y déterminer sa réciproque.
3. Déterminer $f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{1}{4},1\right]\right)$.

Exercice 17 *Bijectivité et imparité*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est. A-t-on le même résultat pour la parité ?

Exercice 18 *Transformée de Žukovskij (*)*

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

1. f est-elle injective, surjective ?
2. Déterminer $f^{\rightarrow}(\mathbb{R}^*)$ et $f^{\rightarrow}(\mathbb{U})$.

Exercice 19 *Une composée (*)*

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F, g : F \to E$ deux applications. On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer qu'alors f et g le sont aussi.

Exercice 20 *Propriétés fondamentales*

Pour chacune des relations suivantes, déterminez : si la relation est réflexive, si elle est transitive, si elle est symétrique, si elle est antisymétrique.
Justifier ensuite que la relation est ou n'est pas : une relation d'équivalence, un ordre, un ordre total.
Si la relation est une relation d'équivalence, donner ses classes d'équivalences.

1. E étant un ensemble ayant au moins deux éléments, la relation d'égalité sur l'ensemble E.
2. E étant un ensemble ayant au moins deux éléments, la relation d'inclusion sur l'ensemble (E).
3. La relation de colinéarité sur l'ensemble des vecteurs du plan.
4. La relation d'orthogonalité sur l'ensemble des vecteurs du plan.
5. La relation de divisibilité sur $\mathbb{R}[X]$ (ensembles des polynômes à coefficients réels). Cette relation se note $|$ et elle est définie comme suit : pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(X)|Q(X) \Leftrightarrow \exists D(X) \in \mathbb{R}[X], Q(X) = D(X)P(X)$.
6. E étant un ensemble ayant au moins deux éléments, la relation vide sur E.
   Cette relation est définie comme suit : étant donné $a \in E$ et $b \in E$, a n'est jamais en relation avec b.
7. Étant donnée une application $f : E \to F$, la relation R définie sur E comme suit : étant donné deux éléments a et b de E, $a\mathrm{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.
8. E étant un ensemble fini, la relation d'équipotence $\simeq$ définie sur (E) de la façon suivante : $A \simeq B \Leftrightarrow$ il existe une bijection de A dans B.

Exercice 21 *Relations sur* $\{1,2\}$

Parmi les 16 relations (pourquoi 16 ?) sur $\{1,2\}$, donner la liste :

1. de toutes les relations d'équivalence,
2. de toutes les relations d'ordre,
3. de toutes les relations d'ordre total.

Exercice 22 *Une relation d'ordre (*)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit une relation $\leq_f$ sur $\mathbb{R}$ en posant pour tous x et y réels :

$$x \leq_f y \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) - f(x) \geq |y - x|$$

1. Montrer que $\leq_f$ est une relation d'ordre.
2. Montrer que $\leq_f$ est totale si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(y) - f(x)| \geq |y - x|$$

3. Á quoi correspond la relation $\leq_{Id_{\mathbb{R}}}$?

Exercice 23 *Une partie bornée*

Soit $A = \{(-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est bornée. Déterminer $\inf A, \sup A$.

Exercice 24 *Inclusion et bornes inférieures et supérieures*

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. Comparer $\inf A, \sup A, \inf B, \sup B$.

Exercice 25 *Avec la relation de divisibilité (*)*

On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité. L'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ possède-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Une borne inférieure ? Une borne supérieure ?