DS 3, le 25/11/2020

Extrait du rapport de concours CC INP 2020 :
« Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé. »

Suivez scrupuleusement ces conseils pour résoudre ce DS, qui dure 4 heures et est constitué de 6 exercices.

Exercice 1 : Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \tag{1}$$

1. (a) Résoudre l'équation $z^2 - 10z + 5 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   (b) Développer $(a+b)^5$.
   (c) En déduire une première résolution de (1).
2. (a) Rappeler (sans démonstration) l'expression des racines cinquièmes de l'unité.
   (b) En déduire une seconde résolution de (1).
3. En confrontant les résultats des questions précédentes, donner les tangentes de $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$. Vous mettrez vos résultats sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ avec $p, q, n \in \mathbb{Z}$.
4. Calculer $\tan\dfrac{\pi}{10}$.

Exercice 2 : Calculs d'intégrales et résolution d'équations différentielles

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a)
$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
   (b)
$$\int_0^{1} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
   (c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x$$
   On pourra effectuer le changement de variable $t=\tan(x)$.
   (d)
$$\int_0^{1} \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$
2. Résoudre sur $]\,1\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle
$$(t-1)y'(t)+y(t)=t$$
3. Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \forall t\in\mathbb{R}, \quad y''(t)-y(t)=\mathrm{e}^{t}\cos t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

Exercice 3 : applications

Partie 1 :
On considère les fonctions suivantes :
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}$$
$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$
$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

1. f_1 est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. f_2 est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. f_3 est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
4. f_4 est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Partie 2 :
Soient E, F et G des ensembles non vides. Soient $f\in\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g\in\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{G})$. On pose :
$$h : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{F}\times\mathrm{G} \\ x & \mapsto & (f(x),g(x)). \end{array}$$

1. (a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
   (b) En utilisant les fonctions de la partie 1, montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
2. (a) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.
   (b) En utilisant les fonctions de la partie 1, montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.

Exercice 4 : une équation différentielle d'ordre 4

1. Déterminer les solutions des équations différentielles :
$$y'' + y = \mathrm{e}^{x} \text{ et } y'' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$
2. On considère (H_1) l'équation différentielle $y^{(4)} = y$ où $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de y.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (H_1) ssi la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.
3. Résoudre l'équation (H_2).
4. En déduire les solutions de (H_1).

Exercice 5 : une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. Après avoir justifié que I_n était bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer I_0 et I_1.
2. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^n e^{-1} \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$.
3. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n - \frac{1}{e}$$
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{I}_n = n!\left(1 - \frac{1}{e}\mathrm{S}_n\right)$$
où $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
6. Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cet exercice permet donc de terminer la démonstration vue en exercice hier sur l'irrationalité de e !

Exercice 6 : applications

Soit E, F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. Pour tous sous-ensembles A, B de E, $f^{\rightarrow}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{\rightarrow}(\mathrm{A}) \cap f^{\rightarrow}(\mathrm{B})$
3. Pour tous sous-ensembles A, B de E tels que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, $f^{\rightarrow}(\mathrm{A}) \cap f^{\rightarrow}(\mathrm{B}) = \varnothing$
4. Pour tous sous-ensembles A, B de E tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, $f^{\rightarrow}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) = f^{\rightarrow}(\mathrm{B}) \setminus f^{\rightarrow}(\mathrm{A})$