

CC INP Mathématiques 1 MP (corrigé par Hugues Blanchard et Simon Billouet)

Partie 1 : Développement ternaire

1. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
- Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞ , bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, l'inégalité triangulaire nous apprend que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| M_u + |\mu| M_v$$

ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞ .

Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un espace vectoriel réel.

Montrons maintenant que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ :

- **Caractère bien défini** : si $u \in \ell^\infty$,

$$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}^*\}$$

est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de \mathbb{R} , donc par propriété de la borne supérieure, $\|u\|$ existe.

- **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $\|u\| = 0$, cela veut dire que $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = 0$$

et par suite, u est la suite nulle.

- **Inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^\infty$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$$

donc la quantité $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de tous les nombres $|u_n + v_n|$, et elle est donc plus grande que le plus petit desdits majorants, à savoir $\|u + v\|$. On a donc bien :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

- **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell^\infty$. Si $\lambda = 0$, on a $\|\lambda u\| = 0 = 0\|u\|$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| \|u\|$$

De ce fait, $\|\lambda u\| \leq |\lambda| \|u\|$. Par ailleurs, on a $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$, donc :

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda u) \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda u\|$$

et donc

$$\|\lambda u\| \leq \lambda \|u\|$$

On conclut donc à l'égalité

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

ce qui conclut la preuve.

2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a

$$0 \leq \frac{|u_n|}{3^n} \leq \frac{M}{3^n}$$

par croissances comparées. Or, $\frac{M}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]0; 1[$); par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge donc absolument, donc converge.

3. Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞ . σ est bien à valeurs dans \mathbb{R} . Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} \right) + \mu \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n} \right) = \lambda \sigma(u) + \mu \sigma(v)$$

par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.

Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{3^n} \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|u_n|}{3^n} \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{3^n} \right) \|u\|$$

Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $|\sigma(u)|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'à la question 2. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, et :

$$|\sigma(u)| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \right) \|u\|$$

et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞ .

4. Soit $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{T}$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{t_n}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}$, donc

$$0 \leq \sigma(t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$

et cette dernière somme de série vaut 1 car, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{2}{3^n} = 2 \frac{1 - 3^{-N}}{2} \rightarrow 1$$

Donc $\sigma(t) \in [0; 1]$.

5. On a

$$\sigma(\tau) = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Notamment, l'application σ n'est pas injective sur \mathbb{T} .

6. Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$$

et

$$3^{n-1} x - 1 < \lfloor 3^{n-1} x \rfloor \leq 3^{n-1} x$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^n x - 1 - 3(3^{n-1} x) = -1 < t_n(x) < 3^n x - 3(3^{n-1} x - 1) = 3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x) \in \{0, 1, 2\}$. Donc $t(x) \in \mathbb{T}$.

7. Tout d'abord, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0$. De plus, pour $n \geq 2$,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{n-1} x \rfloor}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x)}{3^n} \geq 0$$

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, et, pour $n \geq 2$,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x) - 2}{3^n} \leq 0$$

donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3^n x - 1 \leq \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$$

on a donc

$$1 - \frac{1}{3^n x} \leq x_n \leq 1$$

et par théorème d'encadrement, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers x , et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de même puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{t_n(x)}{3^n} = \frac{t_1(x)}{3} + \sum_{n=1}^N \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} - \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_n) = x_1 - 0 + x_{N+1} - x_1 = x_{N+1}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x$$

8. En appliquant la formule donnée par l'énoncé¹ :

```
def flotVersTern(n, x):
    T=[]
    for k in range(1, n+1):
        T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
    return T
```

1. Notons ici qu'il y a un problème de précision : les flottants ont une précision maximale, et l'entier peut quant à lui être arbitrairement grand. La fonction proposée ne peut structurellement qu'être une approximation de la représentation ternaire.

9. Il suffit ici de calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$ sachant que les derniers termes sont nuls :

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(len(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

10. C'est un simple test :

```
def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l
```

De même pour verif :

```
def verif(l):
    s=0
    for k in range(len(l)-1):
        s+=l[k]
    if s%2==0 and l[-1]==-1:
        return True
    if s%2==1 and l[-1]==-2:
        return True
    return False
```

On pouvait aussi remarquer que c'est correct si la somme de tous les termes est impaire :

```
def verif(l):
    if l[-1]!=-1 and l[-1]!=-2:
        return False
    return sum(l)%2==1
```

Partie 2 : Étude d'une fonction définie par une série

11. Notons $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

- Les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 comme composition, somme et quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
- Comme \sin varie entre -1 et 1, $\|f_n\|_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc simplement, sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = \frac{n \cos(nx)}{3^n}$ donc $\|f'\|_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = o(\frac{1}{n^2})$ par croissance comparée. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1), par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^n}$ converge. Donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de dérivation d'une série, φ est donc bien définie sur \mathbb{R} et est de classe \mathcal{C}^1 .

12. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{e^{inx}}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 2, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement.

Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ (fixé pour le reste de la question) :

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{inx}}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} \right)$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente et de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3 \left(1 - \frac{e^{ix}}{3}\right)} = \frac{e^{ix} \left(1 - \frac{e^{-ix}}{3}\right)}{3 \left(\left(1 - \frac{\cos(x)}{3}\right)^2 + \frac{\sin^2(x)}{9} \right)} = \frac{3e^{ix} - 1}{10 - 6 \cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$$

13. La question 11 nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{3 \cos(x)(10 - 6 \cos(x)) - 3 \sin(x)6 \sin(x)}{(10 - 6 \cos(x))^2} = \frac{-18 + 30 \cos(x)}{(10 - 6 \cos(x))^2}$$

On en déduit donc que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n} = \frac{-18 + 30 \cos(x)}{(10 - 6 \cos(x))^2}$$

14. On a montré en question 11 que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} . Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n , étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , sont notamment continues sur $[0, \pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme à terme :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^\pi f_n(x) dx \right)$$

donc

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{3^n} - \frac{\cos(nx)}{n3^n} \right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3^n} + \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^n} \right)$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{3^n} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 12, donc :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6 \cos(x)} dx = \int_0^\pi \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \varphi(x) dx - \frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n3^{n+1}}$$

Enfin, par développement en série entière, on a, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$,

donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6 \cos(x)} dx = \frac{1}{3} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{3} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{3} \ln(2)$$

15. Avec le changement de variable (licite, car de classe \mathcal{C}^1) $\begin{cases} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{cases}$, on obtient que

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6 \cos(x)} dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{10 - 6u} du = \left[\frac{1}{6} \ln(10 - 6u) \right]_1^{-1} = \frac{1}{3} \ln(2)$$

Partie 3 : Développements ternaires aléatoires

16. Par construction, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $N \geq 2$, $T_{n,N}$ est une variable aléatoire finie, donc X_N est une variable aléatoire finie comme somme (finie!) de telles variables aléatoires. X_N admet donc une espérance et une variance. Notons que

$$\mathbf{E}(T_{n,N}) = \frac{1}{N} \cdot 0 + \frac{1}{N} \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right) 2 = 2 - \frac{3}{N}$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_N) = \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E}(T_{n,N})}{3^n} = \left(2 - \frac{3}{N} \right) \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^N}}{1 - \frac{1}{3}}$$

Et finalement :

$$\mathbf{E}(X_N) = \left(2 - \frac{3}{N}\right) \frac{3^N - 1}{2 \cdot 3^N}$$

Par ailleurs, comme les $T_{n,N}$ sont mutuellement indépendants, d'après le lemme des coalitions, les $\frac{T_{n,N}}{3^n}$ le sont aussi. Donc

$$\mathbf{V}(X_N) = \sum_{n=1}^N \mathbf{V}\left(\frac{T_{n,N}}{3^n}\right)$$

Or, par formule de transfert, on a

$$\mathbf{E}(T_{n,N}^2) = \frac{1}{N} \cdot 0 + \frac{1}{N} \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) 4 = 4 - \frac{7}{N}$$

Donc

$$\mathbf{V}(T_{n,N}) = 4 - \frac{7}{N} - \left(2 - \frac{3}{N}\right)^2 = \frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}$$

On a donc

$$\mathbf{V}(X_N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{3^{2n}} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right) = \frac{1}{9} \frac{1 - \frac{1}{9^N}}{1 - \frac{1}{9}} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

Finalement :

$$\mathbf{V}(X_N) = \frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

17. Puisque X_N admet une variance (d'après la question 16), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique, et

$$0 \leq \mathbf{P}(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X_N)}{\varepsilon^2} = \frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N \varepsilon^2} \left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

L'inégalité de gauche étant due au fait qu'une probabilité est à valeurs dans $[0, 1]$. Le terme de droite tend vers 0 (c'est le produit de $\frac{9^N - 1}{8 \cdot 9^N \varepsilon^2}$, qui est convergent donc borné, et d'une suite qui tend vers 0 comme différence de deux telles suites), donc, par encadrement :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \varepsilon) = 0$$

18. La quantité $|\mathbf{E}(X_N) - 1|$ est une constante; donc $\mathbf{P}(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2})$ ne peut valoir que 0 ou 1. Distinguons deux cas :

- Si $|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

et on a alors bien (puisque une probabilité est majorée par 1)

$$\mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

- Si $|\mathbf{E}(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Supposons que $|X_N - 1| \geq \varepsilon$. On a alors (par inégalité triangulaire)

$$\varepsilon \leq |X_N - 1| = |X_N - \mathbf{E}(X_N) + \mathbf{E}(X_N) - 1| \leq |X_N - \mathbf{E}(X_N)| + |\mathbf{E}(X_N) - 1| \leq |X_N - \mathbf{E}(X_N)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a montré l'inclusion d'événements

$$(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \subset \left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

et par croissance des probabilités, on a donc

$$\mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\mathbf{E}(X_n) = \left(2 - \frac{3}{N}\right) \frac{3^N - 1}{2 \cdot 3^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$, on a, à partir d'un certain rang,

$$|\mathbf{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, à partir d'un tel rang,

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_n) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Par ailleurs, d'après la question 17, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Puisque $\mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon)$ est une suite positive majorée par une suite tendant vers 0, par encadrement, on en déduit finalement que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0$$

Partie 4 : Fonction de Cantor-Lebesgue

19. On a :

$$\forall x \in [0, 1], f_0(x) = x$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], f_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], f_1(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

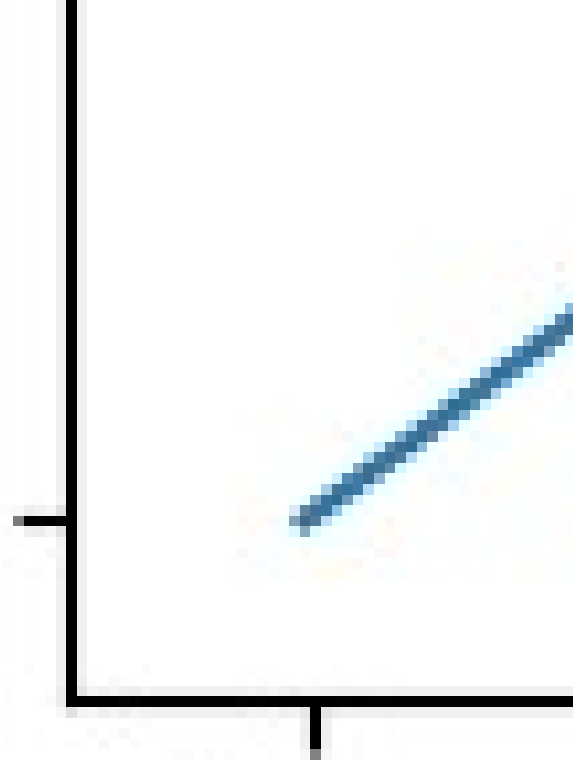
puis que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right], f_2(x) = \frac{9}{4}x \\ \forall x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right], f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right], f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1 \\ \forall x \in \left[\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right], f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{6}{9}, 1\right], f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 :

20. Le programme se déduit directement de la définition :

0.0



0.0

```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    if x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 / 2
    return 1 / 2
```

21. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, 1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- Tout d'abord :

- Si $x \in [0; \frac{1}{3}]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leq \frac{1}{6}$$

- Si $x \in]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = |x - \frac{1}{2}|$. Si $x \geq \frac{1}{2}$, on a donc

$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- Si $x \in [\frac{2}{3}; 1]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left| \frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x \right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

- Si $x \in [0; \frac{1}{3}]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

- Si $x \in]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$

- Si $x \in [\frac{2}{3}; 1]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

22. La série de terme général $\frac{1}{3 \times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]0; 1[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum (f_{n+1} - f_n)$ converge donc normalement sur $[0, 1]$, donc uniformément sur $[0, 1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

23. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0, 1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \text{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0, 1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Alors f_{n+1} est continue sur $[0; \frac{1}{3}]$, $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ et $[\frac{2}{3}; 1]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0, 1]$.

Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $[0; \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}; 1]$, et elle est constante donc croissante sur $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0, 1]$:

par exemple si $x \in [0; \frac{1}{3}]$ et $y \in [\frac{2}{3}; 1]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(\frac{1}{3}) \leq f_{n+1}(\frac{2}{3}) \leq f_{n+1}(y)$.

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3 \times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3 \times 1 - 2)}{2} = 1$.

- **Conclusion** : par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq 1$$

En passant à la limite en n , on trouve que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0, 1]$. Par ailleurs, si $0 \leq x \leq y \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) \leq f_n(y)$$

et là encore, en passant à la limite en n , on obtient

$$f(x) \leq f(y)$$

La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, elle est elle-même continue sur $[0, 1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0; 1])$ est un intervalle contenant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc il contient $[0; 1]$, et f est donc surjective.