Exercice 1 Calcul de primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur un intervalle à préciser :

1. $x \mapsto \cos(3x) + 2\sin(5x)$
2. $x \mapsto 6e^{-4x}$
3. $x \mapsto xe^{-3x^2}$
4. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
5. $\tan^2$
6. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$
7. $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$
8. $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)^2}$
9. $x \mapsto \tan(x)$
10. $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$
11. $x \mapsto \cos(3x+4)e^{2x+1}$
12. $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
13. $x \mapsto \sin(x)^3\cos(x)^2$
14. $x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$
15. $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1}$
16. $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$
17. $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
18. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2-2x+5}$

Exercice 2 Intégrales trigonométriques

Pour p,q dans $\mathbb{N}^*$, calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\mathrm{d}t,\ \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\mathrm{d}t$$

Exercice 3 Intégration par parties : intégrales

Calculer, via une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 t\ln(t)\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\sin(t)\ \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t$

Exercice 4 Intégration par parties : primitives

Calculer des primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^2\ln(x)$
2. $x \mapsto x\arctan(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)e^x$
4. $x \mapsto \ln^2(x)$

Exercice 5 Changement de variable : intégrales

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable suggéré :

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(t)\ \mathrm{d}t$ avec $y = -t$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\ \mathrm{d}t$ avec $y = \sqrt{t}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ avec $t = \cos(y)$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t+t(\ln(t))^2}\ \mathrm{d}t$ avec $y = \ln(t)$

Exercice 6 Changement de variable : primitives

Déterminer des primitives, sur un intervalle que l'on précisera, des fonctions suivantes, par un changement de variable adéquat :

1. $t \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{t}}$
2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}$
3. $t \mapsto \frac{e^{2t}}{e^t+1}$

Exercice 7 Suite d'intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\cos^n(t)+\sin^n(t)}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\cos^n(t)+\sin^n(t)}\, dt$$

1. Calculer $I_n + J_n$.
2. Via le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n, montrer que $I_n = J_n$.
3. En déduire la valeur de I_n et J_n.

Exercice 8 Une suite d'intégrales

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt.$$

Déterminer une relation, pour $n \in \mathbb{N}$, entre I_n et I_{n+2}. En déduire la limite de la suite $(2nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 Fonctions définies par des intégrales

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1. $x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
2. $x \mapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\, dt$
3. $\int_0^x \sqrt{x-t}\sin(t)\, dt$
4. $\int_0^x f(t+x^2)\, dt$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exercice 10 Premier ordre à coefficients constants

Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = x$
2. $y' + y = e^x$
3. $y' + y = e^{-x}$
4. $y' + y = \sin(x)$
5. $y' + 2y = \sin(x)$
6. $y' + y = \sin^2(x)$
7. $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin(x)$
8. $y' - 3y = e^{3x} + e^x \sin(x)$

Exercice 11 Premier ordre à coefficients non constants

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$
3. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1[$
4. $xy'\ln(x) - y = 2x^2\ln^2(x)$ sur $]0,1[$
5. $(2+\cos(x))y' + \sin(x)y = (2+\cos(x))\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
6. $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$

Exercice 12 Problème de Cauchy, premier ordre

Déterminer les fonctions $f : R \to \mathbb{R}$ dérivables et valant 2 en 0 qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (2-\cos(x))f'(x)+\sin(x)f(x) = 2(2-\cos(x))\sin(x).$$

(On pourra trouver une solution particulière d'une certaine équation différentielle sous la forme $x \mapsto a+b\cos(x)$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer.)

Exercice 13 Résonance

Soit ω et θ des réels positifs. Résoudre les équations différentielles

$$y''+\omega^2 y = \cos(\theta x) \quad \text{et} \quad y''+\omega^2 y = \sin(\theta x)$$

Exercice 14 Recollement

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$xy'-2y = x^4.$$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

   On suppose désormais qu'il existe une solution sur tout $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle. On la note φ.
2. Que vaut $\varphi(0)$?
3. Á l'aide de la première question, donner la forme de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. En déduire une expression de φ par cas sur tout $\mathbb{R}$.
4. En examinant la continuité quand $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, puis la dérivabilité et la continuité de la dérivée de φ, en déduire toutes les solutions de l'équation différentielle.
5. Y a-t-il existence et unicité de la solution du problème de Cauchy $xy'-2y = x^4$ sur $\mathbb{R}$, $y(0) = 0$?

Exercice 15 Second ordre à coefficients constants

Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

1. $y''+y'-2y = 10\sin(x)$
2. $y''-4y'+4y = 2e^{2x}+4$
3. $y''-y = e^x\cos(2x)$
4. $y''+y = \mathrm{sh}(x)$
5. $y''+3y'+2y = e^{-x}\sin(x)$
6. $y''-2y'+5y = e^x\cos(2x)$

Exercice 16 Problème de Cauchy, deuxième ordre

Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$y''+y = 3x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2.$$

(On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale du second degré.)

Exercice 17 Est-ce une équation différentielle ?

Trouver toutes les fonctions dérivables $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $y' + y = \int_0^1 y(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 18 Toujours pas une équa-diff, mais...

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 19 Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(On pourra, en raisonnant par analyse synthèse, fixer l'une des variables et dériver par rapport à l'autre, puis montrer que la dérivée d'une telle fonction est nécessairement constante. ***Et on n'oubliera pas la synthèse.****)*

Exercice 20 Une autre équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 21 Une équation intégrale (*)

Trouver toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 22 Attention à la marche (*)

Résoudre l'équation $y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.