Exercice 1 Identité du parallélogramme

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right).$$
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2 Calculs

1. Déterminer la forme algébrique et le module de $\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$.
2. Simplifier $(1+i)^{20}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, (1+i)^n-(1-i)^n$.
3. Simplifier $(1+i)(1+2i)(1+3i)$. En considérant les arguments, quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 3 Simplifications

1. Simplifier $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$.
2. Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi,\pi[$.

Exercice 4 Équations

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $|z|+1=|z+1|$
2. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0$
3. $\mathrm{Re}(z^3)=\mathrm{Im}(z^3)$
4. $z^2+(5-2i)z+5-5i=0$
5. $z^2-2z+1=0$
6. $z^2-(9-2i)z+26=0$
7. $z^4+2-i\sqrt{12}=0$
8. $z^3=\bar{z}$
9. $2z+3\bar{z}=1$
10. $z^4-z^3+z^2-z+1=0$
11. $\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{z+2}{z-3i}$
12. $2z+6\bar{z}=3+2i$

Exercice 5 Linéarisation

Linéariser $\sin(x)^4$; en déduire une expression simple de la somme
$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 6 Calcul de sommes (*)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx), S'_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx) \text{ et } S''_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(kx)$$

Exercice 7 Minoration d'une somme

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad |\sin(x)| \geq \frac{1-\cos(x)}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\sin(k)| \geq \frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin(1)}$.

Exercice 8 Exponentielles complexes

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = 1+i$
2. $e^z = -5-12i$
3. $e^z + e^{-z} = 1$
4. $e^z + 2e^{-z} = i$

Exercice 9 Encore des calculs de cosinus et de sinus

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire une expression explicite de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 10 Géométrie

Soit $z \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que :

1. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs colinéaires.
2. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
3. 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
4. (*) z et ses deux racines carrées soient les affixes de trois points formant un triangle rectangle en z.

Exercice 11 Théorème de l'angle au centre

On considère trois points A, B, C distincts du cercle de centre O et de rayon 1 d'affixe respectifs a, b, c.

1. Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\theta_A}$, $b = e^{i\theta_B}$ et $c = e^{i\theta_C}$.
2. Montrer que
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}}}{e^{i\frac{\theta_A+\theta_C}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_A-\theta_C}{2}\right)}.$$
3. En déduire que
$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\theta_B-\theta_A}{2}\ [\pi].$$
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 12 Un théorème classique de géométrie plane

Soit ABC un triangle dont les points ont pour affixes a, b et c.

1. Montrer que l'orthocentre de ABC a pour affixe $a+b+c$.
2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.
Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite par laquelle passent ces trois points est appelée ***droite d'Euler*** *du triangle, dont l'étude est un classique de la géométrie du triangle.*

Exercice 13 (*) Équilatéritude

Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c, tous distincts.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$, et un triangle équilatéral indirect si et seulement si $a + jc + j^2b = 0$.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$.
